

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 4 (1902)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Rubrik: BIBLIOGRAPHIE

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 11.04.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

BIBLIOGRAPHIE

CHR. BEYEL. — **Darstellende Geometrie.** Mit einer Sammlung von 1800. Dispositionen zu Aufgaben aus der darstellenden Geometrie. Un vol. in-8°, cartonné, de 189 p.; prix : 3,60 marks; B.-G, Teubner, Leipzig, 1901.

Je viens de lire l'ouvrage de M. Beyel et je tiens à dire tout d'abord que je ne crois point qu'il existe, *au point de vue didactique*, auquel l'auteur s'est placé, un ouvrage, sur le sujet, et qui ait une importance comparable.

Ce n'est rien moins qu'une révolution *radicale* dans la manière d'enseigner cet art qui n'est cultivé à vrai dire que par un assez petit nombre de géomètres; car si tous ont suivi des cours de géométrie descriptive et en connaissent théoriquement la discipline, ils n'ont cette connaissance qu'en dilettantes, pour ainsi dire.

Bien peu d'entre eux *voient dans l'espace* et seraient capables d'exécuter, les instruments à la main, une épure même assez peu compliquée. Seuls les géomètres auxquels leurs travaux ou leurs devoirs professionnels donnent une habitude spéciale des tracés, peuvent les achever correctement. En suivant les leçons du livre qui vient de paraître, cette intuition, cette vue dans l'espace, cette habitude nécessaire s'acquièrent forcément et sans autre peine que d'exécuter ce que l'auteur indique avec les méthodes faciles et simples qu'il propose. J'estime cependant qu'il est presque impossible de donner à un lecteur qui n'étudierait pas le livre lui-même, une idée *précise* de l'excellence de sa doctrine, d'autant plus qu'elle se présente sous une forme tellement différente des habitudes reçues universellement, qu'en se bornant à indiquer l'esprit général de l'ouvrage — et c'est tout ce qu'il est possible de faire dans un compte rendu comme celui-ci — on semble soutenir des paradoxes; mais l'autorité du nom de M. Beyel et sa longue expérience de professeur suffisent pour donner aux géomètres, à la fois la certitude qu'il s'agit d'une chose nouvelle intéressante, pratique et le désir de la juger directement.

Le livre ne contient pas une seule épure exécutée; ni planches, ni figures, par conséquent, sauf quelques schémas pour expliquer les conventions de représentation des points, des droites et établir quelques théorèmes. Pour chaque épure que le texte étudie, les données sont déterminées en position par des nombres, qui placent les points par leur distance à 3 plans, les plans par les points où ils coupent 3 axes rectangulaires, etc.; l'élève prépare l'épure au moyen de ces données et il voit la place, dans l'espace, de chaque point ou de chaque élément géométrique dont il s'occupe; il exécute l'épure et la termine au moyen des très claires explications du texte, ayant eu jusqu'à la fin la vue dans l'espace de ce qu'il représente en projections. L'ouvrage

contient 1800 *dispositions* d'épures qui sont aussi des exercices pour que l'élève puisse appliquer ce qu'il apprend, et comme ces dispositions représentent autant d'épures dont l'auteur a dû choisir les données pour que chaque tracé s'effectue complètement dans les limites de la feuille du dessin, — souvent il y a plusieurs dispositions pour un même problème, — on voit le travail colossal que M. Beyel a dû entreprendre à leur sujet; on comprend la facilité qu'elles donnent aux professeurs pour indiquer aux élèves, sans étude préalable, des exercices toujours exécutables jusqu'à la fin et éviter aux élèves, qui s'exercent d'eux-mêmes dans cette discipline, les fastidieux essais qu'ils font trop souvent, lorsqu'ils prennent les données au hasard, avant d'arriver à une épure bien disposée dans tous ses détails pour l'exécution complète. Ces 1800 dispositions seules donneraient à l'ouvrage une très grande valeur; malheureusement pour nous, le livre de M. Beyel est écrit en allemand, ce qui empêchera beaucoup de professeurs, en France, de pouvoir l'étudier et soumettre ces idées nouvelles à la sanction de leur expérience; mais je sais que si l'auteur trouve un accueil favorable auprès de ceux que la diversité de la langue n'arrête pas, il donnera très volontiers par une traduction, la possibilité à tous, de profiter de son énorme travail; c'est ce que je souhaite à tous les futurs professeurs ou étudiants qui auront à enseigner les méthodes de la Géométrie descriptive ou à les apprendre dans les pays de langue française.

E. LEMOINE (Paris).

EM. BOREL. — **Leçons sur les séries divergentes.** Un volume in-8°, III-183 p.; prix : 4 fr. 50; Paris, Gauthier-Villars, 1901.

La théorie des séries divergentes a pour objet la résolution du problème suivant :

Une suite :

$$a_0, a_1, a_2, \dots a_n \dots$$

étant donnée, définir une opération \mathcal{S} qui lui fasse correspondre un élément $\mathcal{S}[a_n]$ doué des propriétés suivantes :

a. Il est unique.

b. Il est égal à la somme \mathcal{S} de la série Σa_n , si cette série est convergente.

c. Par rapport à l'addition, l'opération \mathcal{S} doit vérifier la loi distributive

$$\mathcal{S}[a_n + b_n] = \mathcal{S}[a_n] + \mathcal{S}[b_n].$$

d. Par rapport à la multiplication, l'opération \mathcal{S} doit vérifier la relation :

$$\mathcal{S}[a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0] = \mathcal{S}[a_n] \cdot \mathcal{S}[b_n].$$

e. Si a_n est symbole de fonction analytique d'une variable (réelle ou complexe) z , on doit pouvoir définir un champ dans lequel $\mathcal{S}[a_n(z)]$ est fonction analytique uniforme de la variable z .

f. Si on représente par φ une opération qui résulte de l'application d'un nombre fini d'opérations fondamentales du calcul algébrique et intégral, et si l'on représente par

$$[\varphi[a_n(z)]]$$

la série qu'on obtient en opérant sur les $[a_n(z)]$ avec les règles du calcul des séries convergentes, on doit avoir :

$$\varphi(\mathcal{S}[a_n(z)]) = \mathcal{S}[\varphi[a_n(z)]] .$$

On comprend aisément que si les éléments a_n sont donnés d'une façon tout à fait arbitraire, il ne sera pas possible de satisfaire toutes ces conditions.

La question serait de déterminer les conditions nécessaires et suffisantes pour les éléments a_n afin qu'une semblable opération \mathcal{S} puisse se définir.

Il n'est pas possible de répondre d'une façon complète à cette question. On a donné toutefois une suite de conditions suffisantes, de plus en plus larges, qui ont pour point de départ l'hypothèse de la convergence de la série Σa_n , et qui embrassent successivement, des séries de plus en plus divergentes.

L'ouvrage de M. BOREL a justement pour but l'exposition systématique des méthodes suivies, des recherches faites, des résultats obtenus et des applications à la théorie des fonctions.

Après une introduction historique savante et suggestive, il expose les méthodes qui sont indiquées dans les travaux de Cauchy sur la série de Stirling et de Stieltjes sur le logarithme intégral.

Une méthode plus générale est celle que M. Poincaré a développée dans un mémoire *sur les intégrales singulières des équations différentielles* (Acta Math. t. VIII).

Considérons une fonction $\mathcal{J}(z)$ et le développement

$$c_0 + \frac{c_1}{z} + \frac{c_2}{z^2} + \dots$$

On dira, d'après M. Poincaré, que ce développement, qui peut être divergent, représente *asymptotiquement* la fonction, si la différence

$$\mathcal{J}(z) - \left(c_0 + \frac{c_1}{z} + \dots + \frac{c_n}{z^n} \right)$$

est, lorsque z croît indéfiniment, d'un ordre de grandeur inférieur à $\frac{1}{z^n}$.

Le principe de M. Poincaré consiste à constater que la correspondance ainsi définie entre une fonction et une série asymptotique se conserve dans la plupart des opérations simples.

La différentiation seule, est en général exclue.

La théorie de Stieltjes sur la conversion des séries divergentes en fractions continues peut être envisagée au point de vue suivant :

On demande de définir un algorithme qui fasse correspondre à la suite

$$a_0, a_1, a_2 \dots a_n \dots$$

des termes d'une série divergente, Σa_n , la suite des quotients incomplets

$$b_0, b_1, b_2 \dots b_n \dots$$

d'une fraction continue convergente

$$b_0 + \frac{1}{b_1 + \frac{1}{b_2 + \dots}}$$

Le nombre $S[a_n]$ sera dès lors donné par la valeur d'une telle fraction continue puisqu'on peut prouver que : si y_1, y_2, \dots, y_n , sont des séries de Stieltjes (c'est-à-dire des séries pour lesquelles est possible la représentation demandée en fraction continue convergente), si $\psi(y_1, y_2, \dots, y_n, y_1', y_2', \dots, y_n^{(\lambda)})$ est un polynôme par rapport à ces fonctions et à leurs dérivées, ce polynôme est une série de Stieltjes que l'on obtient en calculant sur les séries y_1, y_2, \dots, y_n comme si elles étaient convergentes, et l'on a

$$\psi(y_1, y_2, \dots, y_n^{(\lambda)}) = 0$$

dans le cas, et dans le cas seulement où la série de Stieltjes obtenue pour ψ est identiquement nulle.

On a des critères qui donnent des conditions suffisantes pour qu'une série soit de Stieltjes. et l'on peut toujours remplacer la fraction continue qui représente une série de Stieltjes par une intégrale définie.

Malheureusement cette belle théorie n'a pas une grande étendue. Il suffit que l'on ait

$$|a_n| > B(2n + 1)!,$$

B quantité positive, pour toutes les valeurs de n supérieures à un nombre donné, pour que la série Σa_n ne soit pas de Stieltjes.

En outre ces séries ne sont aptes qu'à représenter des fonctions analytiques admettant comme unique singularité un segment rectiligne. Le champ des applications est donc forcément assez restreint.

Le point de départ des remarquables travaux de M. Borel paraît avoir été la méthode de M. Cesaro basée sur les valeurs moyennes, et qui définit la valeur de $S[a_n]$, moyennant la limite, supposée finie de l'expression :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_0 s_0 + c_1 s_1 + \dots + c_n s_n}{c_0 + c_1 + \dots + c_n}$$

$$s_r = a_0 + a_1 + \dots + a_r$$

c_0, c_1, c_2, \dots nombres positifs convenablement choisis.

M. Borel a eu l'idée, vraiment féconde, de remplacer les c_r par des fonctions $c_r a^r$ de la variable continue a , la somme $c_1 + c_2 + \dots + c_n$ par la fonction entière

$$\varphi(a) = c_0 + c_1 a + c_2 a^2 + \dots + c_n a^n + \dots$$

la moyenne de M. Cesaro, par la limite :

$$s = \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{c_0 s_0 + c_1 a s_1 + \dots + c_n a^n s_n + \dots}{\varphi(a)}$$

En prenant $\varphi(a) = e^a$ il obtient une méthode de sommation appelée *exponentielle*.

Il pose

$$u(a) = a_0 + a_1 a + \frac{a_2 a^2}{2!} + \frac{a_3 a^3}{3!} + \dots$$

et il transforme l'expression s dans la forme suivante :

$$(1) \quad s = \int_0^\infty e^{-au} u(a) da.$$

Si cette intégrale a un sens, et s'il en est de même que l'intégrale

$$\int_0^{\infty} e^{-a} |u(a)| da$$

et aussi des intégrales

$$\int_0^{\infty} e^{-a} |u^{(\lambda)}(a)| da,$$

dans lesquelles λ désigne un indice de dérivation quelconque, il dit que série Σa_n est absolument sommable.

On peut alors prendre pour $S[a_n]$ la valeur de s donnée par l'intégrale définie (1).

Il prouve en effet que sur les séries absolument sommables numériques sont possibles les opérations simples d'addition et de multiplication, et que si $a_n = u_n z^n$, c'est-à-dire si l'on a à faire avec une série

$$u_0 + u_1 z + u_2 z^2 + \dots$$

ordonnée suivant les puissances d'une variable, on a les théorèmes suivants.

I. Si la série est absolument sommable pour une valeur déterminée de z , $z = z_0$, elle est absolument sommable sur le segment OM, si l'on désigne par O le point $z = 0$, et par M le point $z = z_0$.

II. La somme de cette série sur OM est une fonction analytique, qui n'a pas de point singulier dans le cercle décrit sur OM comme diamètre.

III. Si u , v , w , sont des séries absolument sommables pour $z = z_0$; si d'autre part

$$P(u, v, w, u', v', w', \dots, u^{(\lambda)}, v^{(\lambda)}, w^{(\lambda)}, x)$$

est un polynome par rapport à u , v , w et de leurs dérivées jusqu'à l'ordre λ , dont les coefficients sont des séries entières en x ayant un rayon de convergence supérieur à $|z_0|$; si dans ce polynome P, l'on remplace u , v , w par les séries correspondantes et l'on effectue les calculs comme si ces séries étaient convergentes, on obtient une série S qui est absolument sommable sur OM et qui définit par suite une fonction analytique F régulière à l'intérieur du cercle décrit sur OM comme diamètre.

Cette fonction analytique est précisément ce qui devient P lorsqu'on y remplace u , v , w , non plus par les séries mais par les fonctions analytiques correspondantes.

D'ailleurs la fonction F est identiquement nulle dans le cas et dans le cas seulement où la série S a tous ses coefficients nuls, c'est-à-dire dans le cas où les séries u , v , w vérifient formellement la relation

$$P(u, v, w, u' \dots w^{(\lambda)}, a) = 0;$$

s'il en est ainsi les fonctions analytiques qui correspondent à u , v , w vérifient effectivement cette relation.

C'est bien là le point essentiel de la théorie de M. Borel qui en outre, dans le chapitre IV, détermine le polygone de sommabilité de ses séries, et donne des généralisations simples de la méthode exponentielle. Par ces méthodes on peut en particulier sommer en un point aussi voisin que l'on

veut d'un point quelconque du plan une série de Taylor à rayon de convergence non nul et qui représente une fonction n'ayant qu'un nombre fini de points singuliers dans toute aire finie.

Ces méthodes fournissent donc un moyen d'étudier un développement de Taylor en dehors de son cercle de convergence. M. Borel cherche à les appliquer à la recherche des points singuliers.

Enfin il expose le théorème de M. Mittag-Leffler sur le développement d'une fonction analytique en série de polynômes et il montre comme les idées qu'il a exposées sur les séries divergentes permettent d'aboutir, dans cette voie, à des résultats bien plus étendus.

Ce beau livre est rédigé avec la clarté, l'ordre, le langage élégant qui sont propres aux travaux de M. Borel. Peut-être certains passages de l'Introduction peuvent paraître quelque peu trop indéterminés; par exemple l'énoncé du problème fondamental donné à la page 14. Il me faut encore mettre le lecteur en garde contre une interversion de limites qui se trouve à la page 31 et qui ne paraît pas être justifiée par les prémisses.

Ces remarques ne sauraient diminuer la valeur de ce livre, qui est le seul que l'on possède sur cet intéressant sujet et où l'auteur résume les résultats importants obtenus par lui dans cette vue.

Nous devons savoir bon gré à M. Borel de nous avoir ainsi donné le moyen de parvenir rapidement, et presque sans fatigue à la connaissance de tout ce qui a été fait d'important soit par lui soit par les autres dans cette nouvelle théorie.

ETTORE BORTOLOTTI (Modena).

G. FERRARIS. — **Wissenschaftliche Grundlagen der Elektrotechnik** (Les bases scientifiques de l'Electrotechnique). — Traduit de l'italien par LÉON FINZI. — Un fort volume gr. 8° de 358 p. Prix : 12 marks; B. G. Teubner, Leipzig, 1901.

Ce volume est le résumé des leçons faites au « Reale Museo Industriale Italiano » de Turin par son célèbre directeur. L'activité de Galileo Ferraris, enlevé prématurément à la science en 1897, s'est portée surtout sur l'application aux branches techniques des lois de l'électricité jusqu'alors réservées à la Physique pure. C'est en particulier à ses recherches qu'est due la première exposition complète des lois des actions réciproques des champs magnétiques produits par des courants alternatifs de phases différentes (Rotatione elettrodinamica, 1888). Comme on le sait, ces lois et le moteur qu'il construisit, sont à la base des systèmes polyphasés dont le développement industriel a été aussi aussi heureux que rapide.

Le volume que nous avons sous les yeux se distingue par une langue alerte, familière presque dans sa simplicité; les longues déductions mathématiques y sont rares, et il y est fait un usage suivi de la représentation vectorielle qui simplifie considérablement les explications et les calculs.

Après un premier chapitre d'introduction, consacré aux définitions et à la théorie des vecteurs, nous trouvons groupées cinq chapitres les matières annoncées par le titre : Electricité; Magnétisme; Electromagnétisme; Courants variables et courants alternatifs; Propagation des ondes électromagnétiques. Un complément d'une dizaine de pages contient quelques observations sur les unités magnétiques et électriques, ainsi que sur les divers systèmes de mesures (système pratique, système C. G. S. etc.).

Nous voudrions recommander au traducteur d'ajouter dans une prochaine édition des indications bibliographiques et un index analytique qui augmenteraient beaucoup la valeur pratique de l'ouvrage.

Ajoutons que nous avons en vain cherché un chapitre ou seulement un paragraphe traitant des courants polyphasés.

EMILE STEINMANN (Genève).

G. HOLZMÜLLER. — **Elemente der Stereometrie**. Dritter Teil : *Die Untersuchung und Konstruktion schwierigerer Raumgebilde*. Guldinsche Drehungskörper und Drehungsflächen mit ihren Verallgemeinerungen. Schraubenflächen, Röhrenflächen und ihre Verallgemeinerungen nebst ihren Inversionsverwandten. Krümmungslinien und isothermische Kurvenscharen auf diesen Flächen. Konforme Abbildung. — Mit 126 Figuren. Un vol. in-8°, 335 p. Prix : Mk. 9. — G. J. Goeschen, Leipzig, 1902.

Voilà un traité dont le titre et le contenu ne paraîtront pas d'accord à un lecteur superficiel.

On y trouve en effet des sujets que l'on n'a pas l'habitude de voir étudiés dans les traités élémentaires, mais la manière dont cette étude est faite peut justifier parfaitement le titre général de l'ouvrage.

Toute personne possédant les éléments de géométrie est capable de comprendre le contenu de ce volume et on ne peut que féliciter vivement l'auteur qui a ainsi étendu considérablement le domaine de ce que l'on est convenu d'appeler la stéréométrie élémentaire.

Professeurs et étudiants apprécieront cet ouvrage : les premiers en ce qu'il leur fournit de nombreuses illustrations de leurs écrits et les derniers en ce qu'il leur permet de « voir » les surfaces qu'ils étudient, même à ceux qui sont le moins doués de la faculté de se représenter les objets dans l'espace ; les nombreuses figures très bien faites et très « parlantes » du volume serviront à ce but.

Quant à la méthode d'étude elle-même, elle sera utile surtout à ceux qui ne possèdent pas suffisamment bien leur Calcul différentiel pour l'appliquer à l'étude des surfaces.

Voici d'ailleurs le contenu du volume :

I. — Les règles de Guldin ; leur généralisation et leurs applications aux surfaces et volumes de révolution et à d'autres surfaces.

II. — Les surfaces de vis : leur développement sur des surfaces de révolution et leur représentation conforme sur un plan et sur d'autres surfaces.

III. — Les courbes et surfaces transformées par rayons vecteurs réciproques des hélices et hélicoïdes.

IV. — Surfaces-canaux générales et leurs transformées.

Dans chacune de ces parties de nombreux exemples font suivre au lecteur la marche de la théorie d'une façon absolument concrète. Citons en particulier, sous ce rapport, le dernier d'entre eux dans lequel il est longuement question de ce que l'auteur appelle surface-canal logarithmique, engendrée par une sphère dont le centre se meut sur une spirale logarithmique et dont le rayon est proportionnel au rayon vecteur du centre.

Les transformées par rayons vecteurs réciproques de cette surface sont très intéressantes.

Des indications bibliographiques et historiques permettront de retrouver les auteurs qui se sont déjà occupés de ces questions si compliquées ; la

comparaison de leurs méthodes et de celle de M. Holzmüller sera certainement très instructive et permettra de se convaincre que la Géométrie peut se suffire à elle-même, même dans l'étude de sujets réservés jusqu'ici au Calcul différentiel.

S. MAY (Lausanne).

W. FRANZ MEYER. — **Differential-und Integralrechnung**. Erster Band : Differentialrechnung. (T. X de la *Collection Schubert*), un vol. p. in-8°, xviii-395 p.; prix : 9 marks. — G.-J. Göschen, Leipzig, 1901.

Nous recommandons le livre de M. Meyer à tous ceux qui enseignent les éléments du Calcul différentiel et intégral. Ils trouveront, dans ce premier volume, les notions élémentaires du Calcul différentiel présentées avec beaucoup de rigueur sous une forme très originale. Cet ouvrage diffère d'ailleurs en bien des points des manuels poursuivant le même but. Il en diffère surtout par la place qui a été accordée à l'évaluation des erreurs et il s'agit précisément là d'un problème qui intervient constamment dans les applications pratiques.

L'ouvrage est divisé en deux parties : I. *valeurs limites et dérivées*; II *développements en séries*. Le chapitre I constitue une excellente initiation aux notions fondamentales du Calcul différentiel et intégral; en raison de son importance nous l'examinerons avec quelques détails. L'auteur débute par les théorèmes sur la limite de a^n et de a^m pour $n = \infty$; il les applique à l'évaluation de la somme d'une progression géométrique. Puis viennent les applications à la Géométrie: quadrature de paraboles et de courbes qui s'y ramènent, quadrature de courbes planes dans le cas des coordonnées obliques ou polaires; cubature de corps de révolution: Dans ce même chapitre on trouve encore les paragraphes consacrés à l'étude d'autres valeurs limites dont on fait usage en Géométrie ($\lim \frac{\sin \delta}{\delta}$, etc...., tangente à courbe), puis le binôme de Newton, et les notions élémentaires relatives aux fonctions entières.

Ce n'est qu'après avoir longuement insisté sur ces notions préliminaires que l'auteur aborde l'étude des *dérivées* (chapitre II). Il établit d'abord les règles de dérivation pour le cas des fonctions simples, puis il examine les règles générales relatives aux fonctions composées aux fonctions de fonctions, aux fonctions implicites, etc., en les accompagnant de nombreux exercices.

La deuxième partie contient une belle étude élémentaire du développement en séries et de ses applications. L'auteur y expose successivement le théorème de Rolle et ses applications, les formules de Taylor et de Maclaurin, la convergence et la divergence des séries et des produits infinis.

H. F.