Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 4 (1902)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR UNE PROPRIÉTÉ DES CONIQUES

Autor: Ripert, L.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-5576

a, b, c, étant les côtés de l'heptagone convexe et des heptagones étoilés. On voit que cette équation fournit

$$a^2 + b^2 + c^2 = 7;$$

d'autre part mon dernier théorème fournit

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

ou

$$2bc - 2ab - 2ac = 0,$$

ajoutant la première et la troisième égalité, j'obtiens

$$(b + c - a)^2 = 7$$

ou

$$a + \sqrt{7} = b\ c.$$

Remarque. — Le côté de l'heptagone régulier convexe vaut 0,8677... et diffère peu du *double du module* des logarithmes vulgaires 0,8685...

Jos. Joffroy (Paris).

SUR UNE PROPRIÉTÉ DES CONIQUES

1. — Les théorèmes suivants sont presque évidents :

A, B, C, D, E étant cinq points, les conjuguées harmoniques des droites AE par rapport à (AC, AD) et BE par rapport à (BC, BD) se coupent en un point F de la conique (ABCDE). — Car si l'on considère les points C, D, E, F comme fixes, on a, entre les rapports anharmoniques, la relation

$$A\,(CDEF) = B\,(CDEF) = -1.$$

En vertu du théorème de Chasles, les six points sont sur une conique.

Corrélativement, *a, b, c, d, e étant cinq droites, les conjugués harmoniques des points ae par rapport à (ac, ad) et be par rapport à (bc, bd) déterminent une tangente f à la conique $(abcde)$.*

Ces théorèmes donnent un moyen immédiat et indépendant de l'application du théorème de Desargues de construire *exclusivement* par points (ou tangentes) une conique dont on connaît cinq points (ou cinq tangentes).

2. — Si, dans le dernier théorème, on suppose la droite e à l'infini, il devient le suivant : *La parabole $(abcd)$, tangente aux trois côtés d'un triangle ABC et à une quatrième droite d qui coupe ces côtés en A', B', C', touche les six droites qui joignent le milieu de BC et $B'C'$, CA et $C'A'$, AB et $A'B'$, BC' et CB', CA' et AC', AB' et BA'.*

Prenons ABC pour triangle de référence [1] et soit $lx + my + nz = 0$ l'équation barycentrique de $A'B'C'$ ou d. On trouve aisément que les droites joignant les milieux de BC et $B'C'$, BC' et CB' ont pour équation

$$l(m-n)x + (nl + lm - 2mn)(y - z) = 0 \tag{1}$$

$$x + \frac{my}{2l - m} + \frac{nz}{2l - n} = 0. \tag{2}$$

Ces droites touchent la parabole $(abcd)$ dont l'équation tangentielle est $\sum \frac{l(m-n)}{u} = 0$, et dont l'axe est parallèle à la droite δ qui joint les milieux des trois diagonales (AA', BB', CC') du quadrilatère complet $abcd$ $[\Sigma\,(nl + lm - mn)\,x = 0]$.

3. — Dans le premier théorème du n° 1, au point E correspondent six points F, car on peut opérer sur (AE, BE),... (CE, DE); il en est de même pour chacun des points A, B, C, D. On a donc 5 hexagones inscrits, donnant chacun 60 *pascals*. La figure des 5 hexagones et 300 pascals, dérivant du pentagone donné ABCDE, jouit de propriétés intéressantes que l'on peut déduire, par généralisation et dualisation, de celles de la figure

---

[1] Cette démonstration serait ici superflue si elle n'était nécessaire pour ce qui suit. J'observerai que cette propriété intéressante de la parabole tangente à quatre droites est assez facile à démontrer par les coordonnées cartésiennes pour que l'on puisse la proposer aux élèves comme exercice.

des 6 tangentes à la parabole n° 2 et des 60 *brianchons* correspondants. Je me bornerai à établir une de ces propriétés.

Désignons par a_1 et a_2 les droites (1) et (2), par b_1 et b_2, c_1 et c_2 celles que l'on obtient par permutation circulaire. *Les six droites* $(b_1\, c_1,\, b_2 c_2),\ldots$ $(b_1\, c_2,\, c_1\, b_2),\ldots$ *sont parallèles*. Il est aisé de former leur équation; on trouve pour coordonnées de leur point commun à l'infini

$$(3) \qquad l\,(m-n)\,(3mn-nl-lm), \text{ etc.}$$

La tangente parallèle à cette direction a pour point de contact l'intersection de la parabole et de son diamètre δ. $[l\,(m-n)\,(3\,mn-nl-lm)^3$, etc.$]$.

D'où cette conséquence projective : soient a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 les six tangentes correspondant à la tangente e de la conique $(abcde)$, dont le point de contact est E. *Les six droites* $(b_1\, c_1,\, b_2 c_2,)\ldots$ $(b_1 c_2,\, b_2 c_1),\ldots$ *concourent en un point M situé sur e. Le point de contact* E_1 *de la seconde tangente* e_1 *mené de M à la conique est tel que la droite* EE_1 *(ou* δ_e*), polaire de M, passe par les conjugués harmoniques du point d'intersection de e avec les trois diagonales* $(AA',\, BB',\, CC')$ *du quadrilatère abcd, par rapport à* $(A,\, A'),\ldots$

Et corrélativement, *pour la conique (ABCDE), les six points* $(B_1C_1,\; B_2C_2),\ldots$ $(B_1C_2,\; C_1B_2),\ldots$ *sont sur une droite m passant par E*, etc.

Il existe d'autres propriétés. Ainsi le point (3) est le brianchon des hexagones $a_1b_1c_1\, a_2b_2c_2$ et $a_1b_2c_1\, a_2b_1c_2$. On trouvera des propriétés en examinant les brianchons des hexagones $a_1a_2b_1b_2 c_1c_2$ et $a_1a_2c_1c_2b_1b_2$.

L. Ripert (Poix, *Somme*).