

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 4 (1902)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** SUR LES HEPTAGONES ET LES ENNÉAGONES RÉGULIERS  
**Autor:** Joffroy, Jos.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-5575>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 24.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

de longueur, sinon un multiple de cet atome, et qu'il n'y a pas de lignes, à proprement parler, incommensurables entre elles, c'est-à-dire n'ayant aucune commune mesure. La diagonale d'un carré et son côté sont des droites ayant pour mesure commune l'atome et pas d'autre ; il en est de même de la circonférence d'un cercle et de son rayon. Ce qui est vrai pour les lignes est vrai aussi pour les surfaces et pour les volumes.

S'il n'y a pas de grandeurs incommensurables entre elles, il n'y a pas de nombre incommensurable avec l'unité ;  $\sqrt{2}$ ,  $\sqrt{3}$ ,  $\pi$ , ... sont des nombres qui ont pour diviseur commun avec l'unité l'atome numérique ou le plus petit de tous les nombres. La considération de l'atome supprime donc l'incommensurable, et elle rend superflu, après l'avoir rendu acceptable, le procédé usuel des limites, dans les définitions géométriques.

J.-F. BONNEL (Lyon).

## SUR LES HEPTAGONES ET LES ENNÉAGONES RÉGULIERS

Etant à l'Ecole Polytechnique j'ai trouvé ces *théorèmes* qui ne sont peut-être pas encore connus :

*I. — Le côté de l'ennéagone régulier étoilé  $2 \sin \frac{4\pi}{9}$  est égal à la somme des côtés de l'autre ennéagone régulier étoilé  $2 \sin \frac{2\pi}{9}$  et de l'ennéagone régulier convexe  $2 \sin \frac{\pi}{9}$ .*

Démonstration : Il faut trouver zéro pour l'expression

$$\sin \frac{4\pi}{9} - \left( \sin \frac{\pi}{9} + \sin \frac{2\pi}{9} \right)$$

qui s'écrit

$$\sin \frac{4\pi}{9} - 2 \sin \frac{\pi}{6} \cos \frac{\pi}{18},$$

ou

$$\sin \frac{4\pi}{9} - \cos \frac{\pi}{18},$$

ou encore

$$\sin \frac{4\pi}{9} - \sin \frac{4\pi}{9},$$

c. q. f. d.

II. — *L'inverse du côté de l'heptagone régulier convexe est égal à la somme des inverses des côtés des deux heptagones réguliers étoilés.*

Démonstration : Il faut établir l'égalité

$$\frac{1}{\sin \frac{\pi}{7}} = \frac{1}{\sin \frac{2\pi}{7}} + \frac{1}{\sin \frac{3\pi}{7}},$$

ou celle-ci

$$\sin \frac{2\pi}{7} \sin \frac{3\pi}{7} = \sin \frac{\pi}{7} \sin \frac{3\pi}{7} + \sin \frac{\pi}{7} \sin \frac{2\pi}{7}.$$

Si je décompose en 3 sommes les 3 produits, elle devient

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left( \cos \frac{\pi}{7} - \cos \frac{5\pi}{7} \right) &= \frac{1}{2} \left( \cos \frac{2\pi}{7} - \cos \frac{4\pi}{7} \right) \\ &+ \frac{1}{2} \left( \cos \frac{\pi}{7} - \cos \frac{3\pi}{7} \right), \end{aligned}$$

ou

$$0 = 0,$$

c. q. f. d.

III. — *Le côté de l'heptagone régulier convexe augmenté de  $R\sqrt{7}$  (R étant son rayon) vaut la somme des côtés des deux heptagones réguliers étoilés.*

Démonstration : Si dans l'expression de  $\sin 7x$  en fonction de  $\sin x$  on fait  $7x = \pi$ , puis  $2x = y$ , on obtient l'équation connue

$$y^6 - 7y^4 + 14y^2 - 7 = 0,$$

dont les racines sont

$$\pm 2 \sin \frac{\pi}{7} \quad \text{ou} \quad \pm a$$

$$\pm 2 \sin \frac{\pi}{7} \quad \text{ou} \quad \pm b$$

$$\pm 2 \sin \frac{3\pi}{7} \quad \text{ou} \quad \pm c,$$

$a, b, c$ , étant les côtés de l'heptagone convexe et des heptagones étoilés. On voit que cette équation fournit

$$a^2 + b^2 + c^2 = 7;$$

d'autre part mon dernier théorème fournit

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

ou

$$2bc - 2ab - 2ac = 0,$$

ajoutant la première et la troisième égalité, j'obtiens

$$(b + c - a)^2 = 7$$

ou

$$a + \sqrt{7} = bc.$$

*Remarque.* — Le côté de l'heptagone régulier convexe vaut 0,8677... et diffère peu du double du module des logarithmes vulgaires 0,8685...

JOS. JOFFROY (Paris).

## SUR UNE PROPRIÉTÉ DES CONIQUES

1. — Les théorèmes suivants sont presque évidents :

$A, B, C, D, E$  étant cinq points, les conjuguées harmoniques des droites  $AE$  par rapport à  $(AC, AD)$  et  $BE$  par rapport à  $(BC, BD)$  se coupent en un point  $F$  de la conique  $(ABCDE)$ . — Car si l'on considère les points  $C, D, E, F$  comme fixes, on a, entre les rapports anharmoniques, la relation

$$A(CDEF) = B(CDEF) = -1.$$

En vertu du théorème de Chasles, les six points sont sur une conique.