Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 4 (1902)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR QUELQUES ARGUMENTS NON-EUCLIDIENS (1)
Autor: Vidal, C.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-5595

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 08.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

SUR QUELQUES ARGUMENTS NON-EUCLIDIENS [1]

Pour démontrer que le postulatum d'Euclide, dans la théorie des parallèles, est indémontrable, les néo-géomètres ont recours à plusieurs arguments que nous nous proposons d'examiner.

Argument de non-contradiction. — C'est l'argument favori des non-euclidiens, celui qu'on trouve au fond de presque toutes les discussions sur le postulatum d'Euclide. M. Poincaré, avec toute l'autorité qui s'attache à son nom, l'a formulé en des termes d'une parfaite clarté :

« S'il était possible, dit-il [2], de déduire le postulatum d'Euclide des autres axiomes, il arriverait *évidemment* qu'en niant le postulatum et *en admettant les autres axiomes* [3], on serait conduit à des conséquences *contradictoires;* il serait donc impossible d'appuyer sur de telles prémisses une géométrie cohérente. »

---

(1) NOTE DE LA RÉDACTION. — *Nous rappelons à nos lecteurs que l'*ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE *est à la disposition des euclidiens et des non-euclidiens. Sans prendre de parti dans un sens ou dans un autre cette Revue est une tribune ouverte à tous les mathématiciens.*

(2) *Revue générale des Sciences pures et appliquées,* 15 décembre 1891, p. 769.

(3) « *En admettant les autres axiomes* », voilà ce qu'il ne faut pas perdre de vue, *si l'on ne veut pas changer l'état de la question;* et voilà ce que paraît oublier M. Andrade (*L'Enseignement mathématique,* 1900, p. 299) lorsque, pour maintenir que le postulatum d'Euclide est indémontrable, il commence par adopter une définition de la ligne droite, qui ne reconnaît plus à cette ligne sa propriété classique fondamentale, à savoir : que par deux points donnés *quelconques* on n'en peut faire passer qu'une. Nous ne contestons pas ici à M. Andrade, qu'on le remarque bien, le droit de définir comme il lui plaît la ligne droite. Nous observons seulement que sa définition, lorsqu'il s'agit de savoir si le postulatum d'Euclide est démontrable ou non, *change l'état de la question.* Quant à savoir si la définition de M. Andrade est préférable à la notion classique de la ligne droite, et *quelles conséquences peuvent résulter d'une telle définition,* c'est une question que les euclidiens ne se refusent pas à examiner, mais c'est une *autre question* que celle qui nous occupe, et, pour le moment, nous l'écartons.

« Or c'est précisément ce qu'a fait Lobatchewski. Il suppose au début que :

« *L'on peut par un point mener plusieurs parallèles à une droite donnée ;*

« Et il conserve d'ailleurs tous les autres axiomes d'Euclide. De ces hypothèses il déduit une suite de théorèmes *entre lesquels il est impossible de relever aucune contradiction*, et il construit une géométrie dont l'impeccable logique ne le cède en rien à celle de la géométrie euclidienne. »

Ainsi M. Poincaré trouve *évident* que si le postulatum d'Euclide pouvait être démontré, la proposition contradictoire de ce postulatum devrait conduire à des conséquences *contradictoires*.

Eh bien, non, cela n'est pas évident.

Ce qui est évident, c'est que, si le postulatum était *démontré*, sa contradictoire serait fausse. Or, qu'une proposition *fausse* puisse conduire à des conséquences *fausses*, nous le voulons bien ; qu'elle *puisse* même conduire à des conséquences *contradictoires*, nous ne le contesterons pas ; mais qu'elle *doive* conduire à des conséquences *contradictoires*, voilà qui nous paraît loin de l'évidence.

De fait, cela s'impose si peu, qu'on trouve aisément des exemples où, par le jeu le plus correct des règles de la logique, on peut d'une proposition *fausse* tirer des conséquences *fausses* (ou même *vraies !*) mais nullement *contradictoires*.

Ainsi de cette proposition *fausse :*

Tout nombre plus grand que 1 est égal à un nombre entier.

On peut très correctement déduire :

Que $\frac{3}{2}$ *est égal à un nombre entier*, ce qui est *faux ;*

Que $\frac{4}{2}$ *est égal à un nombre entier*, ce qui est *vrai ;*

Que *le produit de* $\frac{3}{2}$ *par* 5 *est égal à un nombre entier*, ce qui est *faux ;*

Que *le produit de* $\frac{3}{2}$ *par* 4 *est égal à un nombre entier*, ce qui est *vrai ;*

Etc. etc...

Ce sont là, sans doute, des conséquences *immédiates* ou *peu éloignées ;* et, du fait que ces conséquences ne sont pas *contradic-*

toires, il ne s'ensuit pas, nous le reconnaissons, que d'autres *plus éloignées* ne *puissent* l'être. Mais il ne s'ensuit pas non plus qu'elles *doivent* l'être.

Dès lors, on peut douter qu'une proposition *fausse*, *pouvant* d'ailleurs conduire à des conséquences *fausses*, conduise *nécessairement* à des conséquences *contradictoires*.

Il n'est donc pas certain que la contradictoire du postulatum d'Euclide, *même si elle est fausse*, — et elle l'est si le postulatum peut être *démontré* — *doive* conduire à des conséquences *contradictoires*.

L'argument de non-contradiction croule donc par la base, et laisse entière, par conséquent, la question de savoir si le postulatum d'Euclide est ou n'est pas démontrable (1).

Mais est-il vrai, du moins, que la géométrie de Lobatchefsky est exempte de contradiction, et a-t-on bien le droit de parler de son « impeccable logique » ?

Nous ne discuterons pas ici en détail cette question, parce qu'une telle discussion nous entraîneraît trop loin et que d'ailleurs elle n'est pas nécessaire pour notre but. Nous dirons seulement que cette question se ramène, pour nous, à l'une des deux questions suivantes :

1° Est-il vrai, d'après l'interprétation de Beltrami (2), que si l'on remplace les expressions *plan* et *droite* respectivement par les expressions *pseudosphère* et *géodésique de pseudosphère*, toutes les propositions de la géométrie lobatchefskienne concernant le plan et la ligne droite se trouvent vérifiées ?

2° Est-il vrai, d'après l'interprétation de M. Poincaré (3), que si l'on remplace les expressions *espace*, *plan*, *droite*, etc., respectivement par les expressions *domaine intérieur* (ensemble des

---

(1) Il va de soi que l'argument de non-contradiction entraîne dans sa ruine toute démonstration qui le suppose valable. C'est précisément le cas de la démonstration que M. Andrade (*L'Enseignement mathématique*, 1900, p. 300) trouve si décisive pour établir que le postulatum d'Euclide est indémontrable.

(2) *Saggio di interpretazione della geometria non euclidea* (*Giornale di Matematiche*, 1868, t. VI), et *Teoria fondamentale degli spazi di curvatura costante* (*Annali di Matematica pura ed applicata*, 2 sér. t. II). Ces deux Mémoires ont été traduits par Houël (*Annales scientifiques de l'Ecole normale supérieure*, 1869, t. VI).

(3) Note sur la géométrie non-euclidienne, dans le *Traité de Géométrie* de MM. Rouché et de Comberousse (7e édition, 1900, 2e partie, p. 581 et suiv.).

points intérieurs à une sphère dite *sphère absolue*), *faux plan* (partie d'une sphère coupant orthogonalement la sphère absolue), *fausse droite* (partie d'un cercle coupant orthogonalement la sphère absolue), etc., toutes les propositions de la géométrie lobatchefskienne se trouvent vérifiées ?

Si l'on répond *oui* à l'une de ces deux questions, nous croyons pouvoir en conclure que la géométrie lobatchefskienne n'est pas exempte de contradiction, et que, par suite, le postulatum d'Euclide, bien loin d'être indémontrable, est... démontré.

Si l'on répond *non*, nous n'avons rien à conclure de là, sans doute, contre la géométrie de Lobatchefsky ; mais, du même coup, les non-euclidiens doivent renoncer à voir dans les interprétations de Beltrami ou de M. Poincaré, une preuve que cette géométrie est exempte de contradiction.

Quelle que soit du reste la portée de ces interprétations, une chose demeure acquise au sujet de l'argument de non-contradiction : c'est que l'une au moins de ses prémisses est fausse. Il n'en faut pas davantage, évidemment, pour faire de cet argument si souvent employé un pur sophisme.

Argument de la pseudosphère. — Cet argument est en grande faveur auprès de certains non-euclidiens. Le P. Poulain, entre autres, le trouve « d'une rigueur absolue ».

« Voici, dit-il [1], que vous voulez *démontrer* le postulatum (d'Euclide). *On vous concède toutes les propositions précédentes.* Mais on vous défend de recourir à l'évidence pour en admettre une nouvelle. *Une seule ressource vous reste :* prendre une majeure et une mineure dans *la liste A* qui a été accordée, et les combiner pour en tirer une conclusion. C'est là un travail de *logique pure*, dans lequel l'intuition géométrique n'a plus rien à voir.

« Or Beltrami a montré que, pour la pseudosphère, la liste A′ des majeures et mineures peut être rédigée de manière à devenir identiquement la même que la liste A faite pour le plan. Donc, si jamais vous réussissiez à combiner deux prémisses concernant le plan, de manière à en tirer le postulatum, la combinaison ana-

[1] *L'Enseignement chrétien*, 1er mars 1899, p. 181.

logue réussirait *certainement* pour la pseudosphère. Mais on prouve, *par des considérations directes*, que c'est impossible, car on obtiendrait ainsi une proposition fausse. Dès lors, vous n'y arriverez *jamais* pour le plan. »

N'essayez pas d'objecter que ces surfaces ne sont pourtant pas les mêmes, et que par conséquent... — « Au point de vue logique répliquera le P. Poulain, cela ne joue aucun rôle ».

Cela joue si bien un rôle, que c'est cela même qui arrache au P. Poulain, quelques lignes plus loin, une déclaration d'où dépend la réfutation même de l'argument qu'il préconise avec tant d'ardeur.

Pour répondre, en effet, à certaine objection qui lui est faite, le P. Poulain se trouve amené à reconnaître que, si l'on démontre sur la pseudosphère la pluralité des parallèles, « ce n'est pas en s'appuyant sur les propositions de la liste A ; *c'est en introduisant une hypothèse nouvelle*, à savoir que la surface sur laquelle on opère a une courbure non seulement constante mais *négative* [1] ».

Fort bien. De là, contre l'argument de la pseudosphère, l'objection suivante :

Si la démonstration de la contradictoire du postulatum d'Euclide, pour les géodésiques de la pseudophère, s'appuie sur *une seule* donnée *inapplicable au plan*, l'argument de la pseudosphère ne prouve rien ;

Or, en fait, cette démonstration s'appuie sur une donnée inapplicable au plan ;

Donc l'argument de la pseudosphère ne prouve rien.

Niera-t-on la majeure de ce syllogisme ? C'est alors prétendre que la démonstration du postulatum d'Euclide, pour les lignes droites d'un plan, est impossible par le seul fait qu'a été réalisée, pour les géodésiques de la pseudosphère, la démonstration de la proposition contradictoire, au moyen d'une donnée *inapplicable au plan*. Mais pour soutenir une telle prétention, il faut pouvoir démontrer — les euclidiens l'exigeront — le petit théorème que voici : *Etant données, d'une part, deux surfaces différentes S et S' (le plan et la pseudosphère) pour chacune desquelles se trouve véri-*

---

[1] *L'Enseignement chrétien*, 1er mars 1899, p. 182.

fiée une même liste A de propositions ; et, d'autre part, deux propositions contradictoires B et B' non comprises dans la liste A : si, au moyen d'une donnée C' inapplicable à la surface S, on démontre pour la surface S', la proposition B', jamais, au moyen des seules propositions de la liste A, on ne pourra démontrer, pour la surface S, la proposition B. Or, on peut, sans témérité, croyons-nous, défier qui que ce soit de démontrer pareille chose. Donc la majeure de notre objection n'est pas niable.

La mineure ne l'est pas davantage. Rappelons tout d'abord que, dans la question de savoir si le postulatum d'Euclide est vrai ou faux, démontrable ou indémontrable, on tient pour inadmissible — les géomètres sont tous d'accord sur ce point — toute donnée qui constituerait ou supposerait un *nouveau* postulatum. Or, l'attribution au plan d'une courbure constante *négative* non seulement équivaudrait à un *nouveau* postulatum, mais encore constituerait, en faveur de la théorie non-euclidienne des parallèles, une pétition de principe à peine dissimulée. On sait fort bien, en effet, que si le plan a une courbure constante *négative,* le postulatum d'Euclide est *faux* (*a fortiori* indémontrable). Mais le plan a-t-il vraiment une courbure *négative ?* Voilà justement ce qu'il faudrait savoir et ce que, jusqu'à preuve faite, on ne peut admettre *sans créer un nouveau postulatum.* Donc, en l'état de la question, la notion de courbure négative, *comme d'ailleurs celle de courbure positive ou celle de courbure nulle*, est inapplicable au plan. Or, ainsi que le rappelle le P. Poulain, c'est précisément sur cette notion de *courbure négative* que s'appuie la démonstration de la contradictoire du postulatum d'Euclide, pour les géodésiques de la pseudosphère. Donc la mineure de notre objection est exacte.

Donc l'argument de la pseudosphère ne prouve rien.

Autre difficulté. L'argument de la pseudosphère repose sur cette idée que *toutes* les propositions de la géométrie classique indépendantes du postulatum d'Euclide (liste A du P. Poulain) s'appliquent à la pseudosphère et à ses géodésiques aussi bien qu'au plan et aux lignes droites.

Or, parmi les propositions indépendantes du postulatum et concernant le plan ou la ligne droite se trouvent les suivantes :

1° *Le plan est une surface illimitée en tous sens ;*

2° *Par deux points donnés quelconques (de l'espace) on ne peut faire passer qu'une droite.*

Et ni la première ne convient à la pseudosphère, ni la seconde à la géodésique de pseudosphère.

L'idée fondamentale sur laquelle repose l'argument de la pseudosphère est donc fausse. Faux, par conséquent, est l'argument lui-même (1).

Et c'est un pareil argument qui inspire des arrêts comme ceux-ci :

La démonstration du postulatum d'Euclide « est aussi impossible que la quadrature du cercle » (2).

« Il est prouvé maintenant, *d'une manière rigoureuse*, que *jamais* une telle démonstration ne sera donnée ; elle est *impossible*. Autant vaudrait chercher encore le mouvement perpétuel. Voilà qui étonne. Mais il n'y a plus d'objection à faire » (3) !

Rarement plus belle assurance fut moins justifiée.

On aurait tort de croire, d'ailleurs, que tous les néo-géomètres attachent aujourd'hui à l'argument de la pseudosphère une grande importance. C'est ainsi que M. Mansion, le savant professeur de l'Université de Gand et l'un des tenants les plus autorisés des théories non-euclidiennes, n'hésite pas à le déclarer *incomplet* et d'ailleurs *inutile*. La vraie raison, selon lui, de l'*indémontrabilité absolue* du postulatum d'Euclide est donnée par l'argument dont nous allons nous occuper.

Argument des relations analytiques. — Cet argument repose sur un certain nombre de définitions dont l'ensemble constitue,

---

(1) L'argument de la pseudosphère est assez couramment désigné, dans le camp non-euclidien, sous le nom d'argument *de Beltrami*. Qu'on nous permette, à ce sujet, une simple remarque.

Cet argument, dit de Beltrami, ne se trouve ni dans l'*Essai d'interprétation de la Géométrie non-euclidienne* (*Annales scientifiques de l'Ecole normale supérieure*, 1869, t. VI), ni dans la *Théorie fondamentale des espaces de courbure constante négative* (*ibid.*). Dès lors se pose pour nous cette question : Beltrami a-t-il exposé l'argument de la pseudosphère ailleurs que dans les deux Mémoires que nous venons de rappeler ? Si oui, nous n'avons rien à dire. Sinon, il nous paraît injuste d'accoler à cet argument le nom de Beltrami, parce qu'il n'est pas juste de rendre un auteur responsable des interprétations sophistiques dont ses œuvres peuvent être l'objet.

(2) *L'Enseignement chrétien*, 16 novembre 1898, p. 560.

(3) *L'Enseignement chrétien*, 1er novembre 1900, p. 666.

d'après M. Mansion, un exposé élémentaire des principes de la Métagéométrie ou Géométrie générale.

Voici ces définitions [1].

La ligne droite est une ligne illimitée ou indéfinie, homogène, déterminée par deux de ses points suffisamment rapprochés.

Le plan est une surface illimitée ou indéfinie dans laquelle, prenant deux points à volonté et les joignant par une ligne droite, cette ligne est tout entière dans le plan.

Ces définitions de la ligne droite et du plan sont des définitions *génériques* ou *générales* [2].

Le *genre* droite est *spécifié* par les deux ou l'un des deux postulats suivants :

Postulat des deux droites. — Deux droites ne peuvent enclore un espace; ou, équivalemment : *Deux droites qui ont deux points communs coïncident dans toute leur étendue.*

Postulat des trois droites. — Deux droites d'un plan qui font avec une troisième, d'un même côté de celle-ci, des angles intérieurs dont la somme est inférieure à deux angles droits, se rencontrent de ce côté.

Par définition :

La droite *euclidienne* est celle qui vérifie *les deux* postulats ;

La droite *lobatchefskienne*, celle qui vérifie seulement *le premier;*

La droite *riemannienne*, celle qui vérifie seulement le *second.*

Il est reconnu d'ailleurs que si l'on admet le postulat des deux droites, celui des trois droites est équivalent au postulat classique de la *parallèle unique.*

A chaque *espèce* de droite correspond naturellement une *espèce* de plan, et l'on dit qu'un plan est *euclidien, lobatchefskien* ou *riemannien*, selon que les droites qu'il contient sont euclidiennes, lobatchefskiennes ou riemanniennes.

---

(1) Mansion, *Mélanges mathématiques* (1883-1898), 2e partie, p. 43 et suivantes.

(2) « Dans la définition générale de la droite et du plan, dit M. Mansion (*Mélanges math.*, 1883-1898, 2e partie, p. 44), nous employons, avec Riemann, le mot *illimité* ou *indéfini* dans son sens étymologique : *illimité = qui n'a pas d'extrémité, de limite ou de borne.* Ainsi *une circonférence, une sphère sont illimitées ou indéfinies,* parce que l'on n'y rencontre pas d'extrémité de limite ou de borne. » — Par ces derniers exemples, on peut pressentir à quelles équivoques doit donner lieu la notion riemannienne de l'illimité ou indéfini.

« En partant des définitions précédentes, on démontre, dit M. Mansion [1], qu'il existe entre l'hypoténuse a et les côtés b et c d'un triangle rectangle, l'une des relations suivantes :

$$\text{(L)} \qquad \mathrm{C}h\left(\frac{a}{l}\right) = \mathrm{C}h\left(\frac{b}{l}\right)\mathrm{C}h\left(\frac{c}{l}\right),$$

$$\text{(E)} \qquad a^2 = b^2 + c^2,$$

$$\text{(R)} \qquad \cos\left(\frac{a}{r}\right) = \cos\left(\frac{b}{r}\right)\cos\left(\frac{c}{r}\right),$$

suivant que l'on est en géométrie lobatchefskienne, euclidienne ou riemannienne. Les quantités constantes l et r sont dites respectivement *constante lobatchefskienne, constante riemannienne.*

« Réciproquement, au moyen de la définition générale de la droite et des relations (L), (R) ou (E), on peut établir le postulat des deux droites seul, ou celui des trois droites seul, ou enfin les deux réunies.

« Les relations (L), (R) ou (E) caractérisent donc respectivement les trois géométries lobatchefskienne, riemannienne, euclidienne.

« Posons $b + c = s$, $b - c = d$. Les relations (L), (E), (R) sont contenues dans la suivante

$$\text{(M)} \quad \left\{ \begin{aligned} a^2 - b^2 - c^2 = &- p\,\frac{s^4 + d^4 - 2a^4}{1.2.3.4.} + p^2\,\frac{s^6 + d^6 - 2a^6}{1.2.3.4.5.6.} \\ &- p^3\,\frac{s^8 + d^8 - 2a^8}{1.2.3\ldots8.} - \ldots \end{aligned} \right.$$

où l'on suppose $p = \frac{1}{l^2}$, $p = 0$, $p = \frac{1}{r^2}$. On peut donner à p (ou si l'on veut à son inverse) le nom de *paramètre* du système de Géométrie considéré ; ρ est négatif en Géométrie lobatchefskienne, positif en Géométrie riemannienne, nul en Géométrie euclidienne [2]. »

Voici maintenant comment de cet exposé M. Mansion conclut

---

[1] *Mélanges mathématiques*, 1883-1898, 2e partie, p. 45.

[2] D'après cela, comme on peut attribuer à p n'importe quelle valeur négative ou positive, *il y a une infinité de Géométries lobatchefskiennes ou riemanniennes*, tandis que la Géométrie euclidienne — fait important à noter — est nécessairement *une*.

à l'indémontrabilité du postulat des trois droites ou de la parallèle unique, et aussi du postulat des deux droites :

« Les postulats, dit-il [1], ne peuvent être déduits *de la définition générale de la droite*, puisque cela reviendrait à prouver que la relation (M), quel que soit p, équivaut à (E) seul, tandis que (M) équivaut à (E), (L), (R). »

Cet argument suppose tout d'abord, évidemment, que la définition générale de la droite à laquelle on se réfère est vraiment *générale*, c'est-à-dire *applicable à chacune des trois espèces de droites considérées*. Or, il n'en est rien. En exigeant, en effet, que les deux points qui déterminent une droite soient *suffisamment rapprochés*, cette définition suppose implicitement que deux points peuvent ne pas déterminer une droite s'ils sont *suffisamment éloignés*, ce qui équivaut à *exclure* le postulat des deux droites. Une telle définition n'est donc applicable ni à la droite euclidienne ni à la droite lobatchefskienne. Elle n'est donc pas *générale*. Par conséquent l'argument de M. Mansion qui la suppose telle, ne prouve rien.

Mais admettons, si l'on veut, que la définition dite *générale* de la droite soit vraiment telle. Même dans cette hypothèse, l'argument de M. Mansion suppose encore implicitement qu'il n'y a pas de milieu, entre déduire le postulat de la parallèle unique (le seul dont nous nous occupons) de la définition générale de la droite et ne pas le démontrer du tout. Or, il y a, ou du moins on ne sait pas s'il n'y a pas un milieu qui consisterait peut-être à démontrer le postulat de la parallèle unique *avec l'appui du postulat des deux droites*, ce qui vaudrait encore mieux, incontestablement, que de ne pas le démontrer du tout. Nous pouvons même observer que, dans la question de savoir si le postulatum d'Euclide est démontrable ou non, tout argument qui exclut *a priori* le postulat des deux droites, peut lui-même être écarté *a priori* et sans discussion directe, *parce qu'il change l'état de la question*.

L'argument des relations analytiques est donc aussi impuissant que celui de la pseudosphère à démontrer que le postulatum d'Euclide est indémontrable.

---

[1] *Loc. cit.* p. 46.

On répliquera peut-être que les recherches de Gauss, Lobatchefsky et Bolyai « ont démontré que l'axiome des parallèles n'est nullement une conséquence des axiomes restants [1] ». Mais nous savons à quoi nous en tenir sur la portée de cette assertion. La seule chose, en effet, qu'ont démontrée Gauss, Lobatchefsky et Bolyai, au sujet de l'axiome des parallèles (si même ils l'ont démontrée), c'est que la négation de cet axiome ne conduit pas à des conséquences *contradictoires*. « *Ils en conclurent*, dit M. Russell [2], que l'axiome était logiquement indépendant des autres. » Cette *conclusion* vaut donc ce que vaut l'argument de non-contradiction déjà discuté. Or nous avons vu que cet argument ne vaut rien.

Notre réfutation de l'argument des relations analytiques demeure donc entière.

Argument du monde imaginaire. — Cet argument est fondé sur une fiction ingénieuse due à M. Poincaré [3] :

« Imaginons, dit-il, une sphère S et à l'intérieur de cette sphère un milieu dont l'indice de réfraction et la température soient variables. Dans ce milieu se déplaceront des objets mobiles ; mais les mouvements de ces objets seront assez lents et leur chaleur spécifique assez faible pour qu'ils se mettent immédiatement en équilibre de température avec le milieu. De plus

---

[1] F. Klein, *Riemann et son influence sur les mathématiques modernes.* Discours prononcé à Vienne le 27 septembre 1894 et reproduit en tête de l'édition française des *Œuvres mathématiques de Riemann*, 1898, Paris, Gauthier-Villars.

[2] *Essai sur les fondements de la Géométrie*, p. 10 (traduction Cadenat, 1901, Paris, Gauthier-Villars). — Voici, du reste, le passage complet où nous puisons notre citation ; nous y retrouvons le sempiternel sophisme dont on a voulu faire l'argument de non-contradiction :

« Ainsi la tentative de Legendre (pour déduire l'axiome des parallèles des autres axiomes) avait échoué ; mais un simple échec ne peut rien prouver. Une méthode plus hardie, suggérée par Gauss, fut appliquée par Lobatchefsky et par Bolyaï indépendamment l'un de l'autre. *Si l'axiome des parallèles peut se déduire logiquement des autres, on doit, en le niant, et en maintenant le reste, aboutir à des contradictions.* En conséquence, ces trois mathématiciens attaquèrent le problème indirectement : ils nièrent l'axiome des parallèles et obtinrent cependant une géométrie logiquement conséquente avec elle-même. Ils en conclurent que l'axiome était logiquement indépendant des autres et essentiel au système euclidien. Leurs travaux, *étant tous inspirés par ce motif*, peuvent être mis à part comme formant la première période dans le développement de la Métagéométrie ».

[3] *Revue générale des sciences pures et appliquées*, 30 janvier 1892, p. 74.

tous ces objets auront même coefficient de dilatation, de sorte que nous pourrons définir la température absolue par la longueur de l'un quelconque d'entre eux. Soit R le rayon de la sphère, ρ la distance d'un point du milieu au centre de la sphère. Je supposerai qu'en ce point la température absolue soit $R^2 - \rho^2$ et l'indice de réfraction $\frac{1}{R^2 - \rho^2}$.

« Que penseraient alors des êtres intelligents qui ne seraient jamais sortis d'un pareil monde ?

« 1° Comme les dimensions de deux petits objets transportés d'un point à un autre varieraient *dans le même rapport*, puisque le coefficient de dilatation serait le même, ces êtres croiraient que ces dimensions n'ont pas changé ; ils n'auraient aucune idée de ce que nous appelons différence de température ; aucun thermomètre ne pourrait le leur révéler, puisque la dilatation de l'enveloppe serait la même que celle du liquide thermométrique.

« 2° Ils croiraient que cette sphère S est infinie ; ils ne pourraient jamais en effet atteindre la surface ; car à mesure qu'ils en approcheraient, ils entreraient dans des régions de plus en plus froides, ils deviendraient de plus en plus petits, sans s'en douter, et ils feraient de plus en plus petits pas.

« 3° Ce qu'ils appelleraient des lignes droites ce seraient des circonférences orthogonales à la sphère S, et cela pour trois raisons :

« 1° Ce seraient les trajectoires des rayons lumineux ;

« 2° En mesurant diverses courbes avec un mètre, nos êtres imaginaires reconnaîtraient que ces circonférences sont le plus court chemin d'un point à un autre ; en effet, leur mètre se contracterait ou se dilaterait quand on passerait d'une région à une autre et ils ne se douteraient pas de cette circonstance ;

« 3° Si un corps solide tournait de telle façon qu'une de ses lignes demeurât fixe, cette ligne ne pourrait être qu'une de ces circonférences. C'est ainsi que si un cylindre tournait lentement autour de deux tourillons et était chauffé d'un côté, le lieu de ses points qui ne bougeraient pas serait une courbe convexe du côté chauffé et non pas une droite.

« Il en résulterait que ces êtres adopteraient la géométrie de Lobatchefsky. »

Sur ces données, M. Hadamard [1] raisonne ainsi :

« Nous voyons bien maintenant qu'il est impossible de démontrer le postulatum d'Euclide à l'aide des propositions antérieures : car, si une telle démonstration existait, elle serait admise par les êtres fictifs dont il vient d'être question (puisque toutes ces propositions antérieures subsisteraient à leurs yeux) ; or elle conduirait alors à un résultat inexact, puisque, pour ces êtres, le postulatum est faux. »

Ce raisonnement n'a, ce nous semble, rien de péremptoire.

On suppose, en effet, que les êtres fictifs dont il est question admettent, comme nous, toutes les notions et propositions qui dans notre géométrie classique précèdent le postulatum d'Euclide. Il faut bien remarquer, dès lors, que la question de savoir si ce postulatum est démontrable ou non se pose pour eux *absolument dans les mêmes conditions que pour nous*. Pour eux comme pour nous, c'est une question de *pure logique* dans laquelle *l'expérience et par suite la fiction de M. Poincaré n'ont rien à faire*. Pourquoi dire alors que si le postulatum était *démontré*, ce résultat serait pour eux *inexact?* Inexact ? Comment le sauraient-ils ? Ce ne pourrait être par le raisonnement, puisque, par hypothèse, le raisonnement leur indiquerait, au contraire, que le résultat est *exact*. Ce serait donc par l'expérience. Mais l'expérience, nous venons de le rappeler, ne peut rien prouver ici. On n'a donc pas le droit de dire que si le postulatum était *démontré*, les êtres fictifs de M. Poincaré tiendraient ce résultat pour inexact [2].

Par conséquent l'argument de M. Hadamard ne prouve rien.

Il existe encore d'autres arguments par lesquels on prétend démontrer que le postulatum d'Euclide est indémontrable. Mais nous n'en connaissons pas qui diffèrent, pour le fond, des précédents.

Il y a, du reste, un moyen nous ne dirons pas facile (et pour

---

(1) *Leçons de geométrie élémentaire*, t. I, p. 282.

(2) Si d'ailleurs, et toujours en supposant le postulatum *démontré*, l'expérience obligeait ces êtres à *constater* que certaines lignes *concrètes*, prises pour des lignes droites, ne vérifient pas le postulatum ; eh bien, la conclusion à tirer par eux de ce fait serait fort simple : ce serait que les lignes *concrètes*, *physiques*, prises tout d'abord pour des lignes droites, ne sont pas, en réalité, des lignes droites.

cause !), mais péremptoire, de réfuter en bloc et d'un seul coup tous les arguments possibles visant au même but ; c'est de démontrer... le postulatum lui même.

Nous croyons volontiers que les interprétations euclidiennes de la géométrie lobatchefskienne, d'après Beltrami et M. Poincaré, peuvent fournir les éléments d'une démonstration *indirecte* du postulatum d'Euclide. Mais, à côté de cette démonstration, ou, s'il faut le dire, à son défaut, nous croyons qu'il existe du même postulatum une démonstration *directe* et *indépendante de la somme des angles d'un triangle* : c'est celle qu'on trouve dans notre brochure : *Pour la géométrie euclidienne* (1).

Le seul fait d'indiquer ici comme valable cette démonstration nous oblige d'ailleurs à la défendre contre une objection toute récente de M. Barbarin.

Objection de M. Barbarin contre une démonstration du postulatum d'Euclide (2). — Cette objection vise un lemme où nous nous proposons de démontrer que dans un quadrilatère ABCD birectangle en A et B, si l'angle C est *obtus* ou *aigu*, l'angle D est inversement *aigu* ou *obtus*.

M. Barbarin résume et critique notre démonstration comme il suit :

« 1° Supposons d'abord que l'angle C soit obtus, et tirons successivement CE perpendiculaire à CD et coupant AB, EF perpendiculaire à AB et coupant CD, FG perpendiculaire à CD et ainsi de suite (fig. 1).

« Nous finirons par aboutir à une perpendiculaire MN à CD, obtenue après un nombre *limité* d'opérations et coupant BD au point N. Alors, dans le triangle rectangle MDN, l'angle D est aigu.

« L'existence de la perpendiculaire MN est en effet certaine *lorsque les distances AE, EG, GK..., etc., ne peuvent pas tomber au-dessous de toute longueur assignable ; dans ce cas, le raisonnement donné par l'auteur à la page 7 de son livre est exact. Mais*

(1) Paris, Croville-Morant, 1900.

(2) P. Barbarin, *La Géométrie non-euclidienne*, note I, p. 74-75, Paris, Naud, 1902 Collection *Scientia*).

il cesse de l'être si ces distances forment une suite décroissante et convergente puisqu'à la limite de cette suite répondrait une perpendiculaire commune XY coupant à la fois AB et CD ensemble ou leurs prolongements ensemble; lorsque XY coupe AB, D est aussi un angle obtus.

« 2° Supposons maintenant l'angle C aigu et tirons AF perpendiculaire sur CD, F E perpendiculaire sur AB, EH perpendiculaire sur CD, et ainsi de suite (fig. 2).

« Si AE, EG, etc..., forment une suite divergente, nous finirons par obtenir après un nombre *limité* de constructions une perpendiculaire MNP à CD prolongé coupant AB et BD. Alors l'angle NDC est obtus. *Mais lorsque la suite est convergente, si*

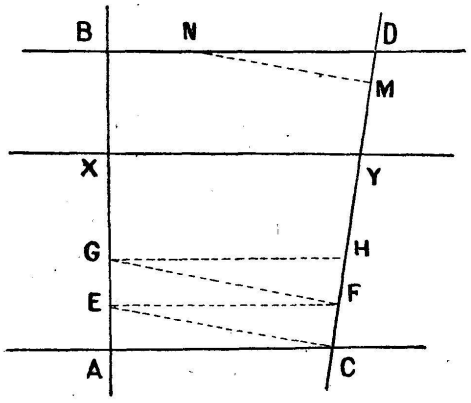

Fig. 1.

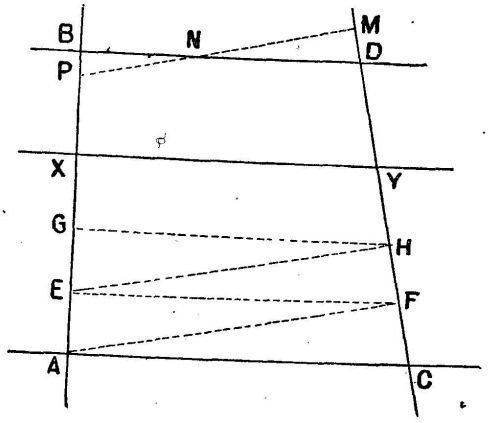

Fig. 2.

elle a une limite AX moindre que AB, on arrive à une perpendiculaire limite XY commune à AB et à CD; les angles C et D sont alors aigus ensemble.

« Au résumé, la proposition de M. Vidal est fausse. »

Cet exposé a le mérite de la brièveté et de la finesse, mais il a le tort de négliger dans notre démonstration justement ce qui la met à l'abri de l'objection soulevée contre elle.

Au fond, il s'agit de savoir si les angles correspondants successifs ACD, EFD..., sont *tous* obtus (fig. 1) ou *tous* aigus (fig. 2).

Notons d'abord qu'en partant de la perpendiculaire AC à AB, et en suivant le mode de construction indiqué, on démontre aisément que si ACD est un angle *obtus* (fig. 1), EFD est aussi un angle *obtus;* et que si ACD est un angle *aigu* (fig. 2), EFD est aussi un angle *aigu*.

Maintenant nous posons une question. Le mode de construc-

tion et le raisonnement employés pour cette démonstration (voir pages 6 et 9 de notre brochure) sont-ils, oui ou non, *indépendants de la distance du point A à BD?* Qu'on essaie de répondre *non*. Nous demanderons aussitôt qu'on élève sur AB, en un point *quelconque* situé *entre A et B*, une perpendiculaire faisant avec CD un angle correspondant à l'angle ACD, le premier étant, par hypothèse, comme le second, obtus ou aigu ; et nous verrons si quelque chose pourra nous empêcher d'appliquer, en partant de cette perpendiculaire *quelconque*, le mode de construction et le raisonnement employés en partant de la perpendiculaire AC. Inutile d'insister : le fait que ce mode de construction et ce raisonnement sont indépendants de la distance du point A à BD défie toute contradiction.

Soit donc n un nombre aussi grand que l'on voudra d'angles correspondants successifs ACD, EFD..., formés en suivant le mode de construction indiqué, l'angle ACD désignant *le premier*.

D'après ce qu'on vient de dire, si le $(n-1)^e$ angle, quel que soit n, est un angle *obtus*, le n^e est aussi un angle *obtus ;* et si le $(n-1)^e$ angle est un angle *aigu*, le n^e est aussi un angle *aigu*.

Or, nous savons déjà que si le 1er angle ACD est un angle *obtus* (fig. 1), le 2e EFD est aussi un angle *obtus*. Donc le 3e, le 4e,..., le $(n-1)^e$, le n^e sont aussi des angles *obtus*.

De même nous savons que si le 1er angle ACD est un angle *aigu* (fig. 2), le 2e EFD est aussi un angle *aigu*. Donc le 3e, le 4e..., le $(n-1)^e$, le n^e sont aussi des angles *aigus*.

Il est donc bien certain que les angles correspondants successifs ACD, EFD, GHD,... sont *tous* obtus ou *tous* aigus.

Mais alors, il n'est pas moins certain qu'*aucune des distances consécutives* AE, EG... *ne peut être nulle*, cette impossibilité se justifiant pour chacune d'elles *comme pour AE* l'une d'elles. Dire, d'ailleurs, qu'*aucune* de ces distances *ne peut être nulle*, c'est dire qu'*aucune* d'elles *ne peut* « tomber au-dessous de *toute* longueur assignable » : il n'y a, en effet, que les longueurs *pouvant devenir nulles* dont on puisse dire qu'elles *peuvent* « tomber au-dessous de *toute* longueur assignable ».

Par conséquent, l'hypothèse d'une suite *convergente* pour les distances consécutives AE, EG,... est impossible ; et, dès lors,

impossible aussi se trouve l'hypothèse d'une « perpendiculaire limite XY commune à AB et à CD ».

Au résumé, l'objection de M. Barbarin porte à faux.

La note spéciale que le distingué géomètre nous a fait l'honneur de consacrer, dans son récent ouvrage, à notre démonstration, n'a donc plus d'objet ; et nous espérons de la courtoisie de l'auteur, que, dans une prochaine édition, cette note sera supprimée.

Conclusion. — De toutes les discussions qui précèdent doit se dégager, ce nous semble, au moins cette impression que la doctrine non-euclidienne n'est pas aussi ferme qu'on veut bien le dire. Et peut-être le jour n'est-il pas éloigné où les non-euclidiens n'oseront plus affecter, vis-à-vis de leurs adversaires, une assurance et un esprit de conciliation qui ne vont point sans quelque ironie. On comprend, d'ailleurs, que certains géomètres, trompés par d'ingénieux sophismes et engagés à fond dans l'aventure non-euclidienne, aient quelque peine à revenir de leur erreur. Mais, qu'ils le veuillent ou non, ils seront, croyons-nous, vaincus par la logique.

C. Vidal (Paris).