Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 4 (1902)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: RELATIONS ANALYTIQUES DES SPHÈRES ET ELLIPSOIDES (1)

Autor: Kilbinger

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-5594

RELATIONS ANALYTIQUES

DES

SPHÈRES ET ELLIPSOÏDES [1]

Dans le présent travail nous allons démontrer, comment on peut utiliser la théorie de l'affinité, pour établir quelques résultats analytiques relatifs à l'ellipsoïde à l'aide des analogues de la sphère.

Soient données la sphère K et l'ellipsoïde K_1, et supposons que ce soient deux surfaces homologues des systèmes alliés des espaces Σ respectivement Σ_1. Nous établirons dans Σ_1 un système de coordonnées obliques en prenant pour axes trois diamètres conjugués quelconques de K_1. Les diamètres correspondants de K sont rectangulaires et seront les axes des coordonnées de K. Nous les désignons par $\Xi\Xi_1$, HH_1 et ZZ_1, l'origine par O (le centre de K) et les coordonnées correspondantes de K_1 par XX_1, YY_1 et ZZ_1, l'origine par O_1 (le centre de K_1). Soient encore $2a_1$, $2b_1$, et $2c_1$ les longueurs des trois diamètres conjugués de K_1, qui coïncident aux axes des coordonnées et r le rayon de la sphère K. Alors nous désignons deux points homologues P et P_1 situés sur K et K_1, dont les coordonnées sont respectivement ξ, η, ζ et x, y, z.

De ce que deux parties d'une droite de Σ sont dans le même rapport que les homologues dans Σ_1, nous avons les équations suivantes des coordonnées :

$$\text{(1)} \qquad \frac{\xi}{r} = \frac{x}{a_1}, \quad \frac{\eta}{r} = \frac{y}{b_1}, \quad \frac{\zeta}{r} = \frac{z}{c_1}.$$

[1] Sphère et ellipsoïde, *L'Enseignement mathématique*, 2e année, 1900, p. 196.

L'équation de la sphère K est :

$$\xi^2+\eta^2+\zeta^2=r^2. \tag{2}$$

Il suit de (1) et (2) :

$$\frac{x^2}{a_1^2}+\frac{y^2}{b_1^2}+\frac{z^2}{c_1^2}=1. \tag{3}$$

C'est l'équation d'un ellipsoïde par rapport aux trois diamètres conjugués.

Si l'on fait dans (3) successivement $x, y, z=0$, on obtient des ellipses comme trace de la surface K sur les plans coordonnés. Tout plan diamétral pouvant être un plan coordonné, nous pouvons généraliser ce résultat, en disant, que les traces de K_1 sur les plans diamétraux sont des ellipses.

L'équation du plan tangent de la sphère K au point ξ_1, η_1, ζ_1 peut s'écrire :

$$\xi\xi_1+\eta\eta_1+\zeta\zeta_1=r^2. \tag{4}$$

Soient x_1, y_1, z_1 les coordonnées du point correspondant, on aura pour le plan tangent de K_1 au point x_1, y_1, z_1 les relations :

$$\frac{\xi_1}{r}=\frac{x_1}{a_1},\ \frac{\eta_1}{r}=\frac{y_1}{b_1},\ \frac{\zeta_1}{r}=\frac{z_1}{c'_1} \tag{5}$$

et comme ci-dessus :

$$\frac{\xi}{r}=\frac{x}{a_1},\ \frac{\eta}{r}=\frac{y}{b_1},\ \frac{\zeta}{r}=\frac{z}{c_1}. \tag{6}$$

Il suit des trois dernières conditions l'équation du plan tangent :

$$\frac{xx_1}{a_1^2}+\frac{yy_1}{b_1^2}+\frac{zz_1}{c_1^2}=1. \tag{7}$$

L'équation (7) désigne encore un plan polaire d'un point quelconque $x_1, y_1\ z_1$.

La normale de K est un rayon de K. Les équations au point ξ_1, η_1, ζ_1 sont :

$$\xi-\xi_1=\frac{\xi_1}{\zeta_1}(\zeta-\zeta_1) \tag{8}$$

et

$$\eta - \eta_1 = \frac{\eta_1}{\zeta_1}(\zeta - \zeta_1);$$

ou

$$(9) \qquad \frac{\xi}{\xi_1} = \frac{\eta}{\eta_1} = \frac{\zeta}{\zeta_1}.$$

Cette normale a pour ligne correspondante en Σ_1 un diamètre d_1 de K_1 conjugué au plan tangent (7).

Des équations (5), (6) et (9) nous dérivons la relation pour le diamètre d_1.

$$(10) \qquad \frac{x}{x_1} = \frac{y}{y_1} = \frac{z}{z_1}.$$

L'équation du plan diamétral de K conjugué à la normale (9) est :

$$(11) \qquad \xi\xi_1 + \eta\eta_1 + \zeta\zeta_1 = 0.$$

Par une substitution comme ci-dessus nous aurons pour le plan diamétral conjugué au diamètre (10) la condition :

$$(12) \qquad \frac{xx_1}{a_1^2} + \frac{yy_1}{b_1^2} + \frac{zz_1}{c_1^2} = 0.$$

Les équations (7) et (12) démontrent, que ces deux plans sont parallèles entre eux.

Les plans tangents aux extrémités des diamètres conjugués $2a_1$, $2b_1$ et $2c_1$ ont les équations :

$$(13) \qquad x = \pm a_1, y = \pm b_1, \; z = \pm c_1.$$

C'est-à-dire que ces plans tangents sont parallèles aux plans des coordonnées.

Jusqu'ici nous avons employé un système de coordonnées obliques. Mais nous pouvons aussi prendre pour coordonnées les trois axes de l'ellipsoïde K_1. Désignons par $2a$, $2b$ et $2c$ ces trois axes, nous pouvons alors dériver très facilement les résultats connus de la géométrie analytique des résultats ci-dessus. Nous les obtiendrons en remplaçant dans les équations ci-dessus les valeurs a_1, b_1, c_1 par a, b, c.

D^r^ KILBINGER (Mulhouse).