

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 4 (1902)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: TRANSFORMATION DES COORDONNÉES PROJECTIVES
Autor: Loria, G.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-5593>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 03.05.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

TRANSFORMATION

DES

COORDONNÉES PROJECTIVES

La question de la transformation des coordonnées barycentriques, que M. Laisant a traitée d'une façon si élégante (voir *L'enseignement*, t. III, 1901, p. 208-210), n'est qu'un cas particulier du problème de la transformation des coordonnées projectives quelconques. Or, ce problème s'impose dans plusieurs circonstances, par exemple lorsqu'on veut exposer méthodiquement les applications des formes algébriques à la géométrie; en conséquence, depuis longtemps, j'ai la coutume de le traiter dans mon cours d'une manière très simple qui peut-être intéressera quelques lecteurs de cette *Revue* et que, par conséquent, je crois bon d'exposer en quelques lignes.

Soient donnés cinq points quelconques fixes dans l'espace : A_0, A_1, A_2, A_3, U , et un point quelconque P ; on sait que les quatre rapports anharmoniques suivants :

$$(1) \quad x = \overline{A_2 A_3} (A_1, A_0, U, P), \quad y = \overline{A_3 A_1} (A_2, A_0, U, P), \quad z = \overline{A_1 A_2} (A_3, A_0, U, P)$$

sont les coordonnées projectives du point P , tandis que si l'on pose

$$(2) \quad x = \frac{x_1}{x_0}, \quad y = \frac{x_2}{x_0}, \quad z = \frac{x_3}{x_0},$$

x_0, \dots, x_3 en sont les coordonnées homogènes. Prenons, à présent, cinq autres points fixes $A'_0, A'_1, A'_2, A'_3, U'$, dont les coordonnées homogènes soient respectivement

$$\begin{aligned} & a_{00}, a_{01}, a_{02}, a_{03}; \\ & a_{10}, a_{11}, a_{12}, a_{13}; \\ & a_{20}, a_{21}, a_{22}, a_{23}; \\ & a_{30}, a_{31}, a_{32}, a_{33}; \\ & u_0, u_1, u_2, u_3; \end{aligned}$$

par rapport à ce nouveau système, le point P aura de nouvelles coordonnées projectives qui seront définies par les équations suivantes, analogues aux équations (1) :

$$(3) \quad \begin{aligned} x' &= \overline{A_2' A_3'} (A_1', A_0', U', P), & y' &= \overline{A_3' A_1'} (A_2', A_1', U', P), \\ z' &= \overline{A_1' A_2'} (A_3', A_0', U', P). \end{aligned}$$

Or, si on indique par α_{ik} le complément algébrique de a_{ik} dans le déterminant

$$\begin{vmatrix} a_{00} & \dots & a_{03} \\ \cdot & \dots & \cdot \\ a_{30} & \dots & a_{33} \end{vmatrix},$$

on trouve que les équations homogènes des deux plans $A_2' A_3' A_1'$ et $A_2' A_3' A_0'$ sont respectivement :

$$(4) \quad \begin{cases} \alpha_{00}X_0 + \alpha_{01}X_1 + \alpha_{02}X_2 + \alpha_{03}X_3 = 0 \\ \alpha_{10}X_0 + \alpha_{11}X_1 + \alpha_{12}X_2 + \alpha_{13}X_3 = 0, \end{cases}$$

ou bien

$$\left\{ \begin{aligned} \sum_{i=0}^{i=3} \alpha_{0i}X_i &= 0, \\ \sum_{i=0}^{i=3} \alpha_{1i}X_i &= 0, \end{aligned} \right.$$

$X_0 \dots X_3$ étant les coordonnées courantes. Comme les deux plans $A_2' A_3' U'$, $A_2' A_3' P$ appartiennent au faisceau déterminé par les deux plans $A_2' A_3' A_1'$ et $A_2' A_3' A_0'$ on trouve tout de suite que leurs équations sont :

$$(5) \quad \sum_{i=0}^{i=3} \alpha_{0i}X_i - \frac{\sum_{i=0}^{i=3} \alpha_{0i}U_i}{\sum_{i=0}^{i=3} \alpha_{1i}U_i} \sum_{i=0}^{i=3} \alpha_{1i}X_i = 0; \quad \sum_{i=0}^{i=3} \alpha_{0i}X_i - \frac{\sum_{i=0}^{i=3} \alpha_{0i}X_i}{\sum_{i=0}^{i=3} \alpha_{1i}X_i} \sum_{i=0}^{i=3} \alpha_{1i}X_i = 0.$$

Le rapport anharmonique formé par les deux plans (4) avec les

deux plans (5) est exprimé par le quotient

$$\frac{\sum_{i=0}^{i=3} \alpha_{0i} u_i}{\sum_{i=0}^{i=3} \alpha_{1i} u_i} : \frac{\sum_{i=0}^{i=3} \alpha_{0i} x_i}{\sum_{i=0}^{i=3} \alpha_{0i} x_i}$$

si donc on pose $x' = \frac{x'_1}{x'_0}$, à cause des équations (3), on aura :

$$(6) \quad \frac{x'_1}{x'_0} = \frac{\sum_{i=0}^{i=3} \alpha_{1i} x_i}{\sum_{i=0}^{i=3} \alpha_{1i} u_i} : \frac{\sum_{i=0}^{i=3} \alpha_{0i} x_i}{\sum_{i=0}^{i=3} \alpha_{0i} u_i}$$

On trouve d'une manière analogue :

$$(7) \quad \frac{x'_2}{x'_0} = \frac{\sum_{i=0}^{i=3} \alpha_{2i} x_i}{\sum_{i=0}^{i=3} \alpha_{2i} u_i} : \frac{\sum_{i=0}^{i=3} \alpha_{0i} x_i}{\sum_{i=0}^{i=3} \alpha_{0i} u_i}$$

$$(8) \quad \frac{x'_3}{x'_0} = \frac{\sum_{i=0}^{i=3} \alpha_{3i} x_i}{\sum_{i=0}^{i=3} \alpha_{3i} u_i} : \frac{\sum_{i=0}^{i=3} \alpha_{0i} x_i}{\sum_{i=0}^{i=3} \alpha_{0i} u_i}$$

Or, en comparant entre elles les trois équations (6), (7), (8), on voit tout de suite que, en appelant ρ un facteur numérique différent de 0 et de ∞ , on peut écrire :

$$(9) \quad \rho n'_k = \frac{\alpha_{k0} x_0 + \alpha_{k1} x_1 + \alpha_{k2} x_2 + \alpha_{k3} x_3}{\alpha_{k0} u_0 + \alpha_{k1} u_1 + \alpha_{k2} u_2 + \alpha_{k3} u_3}$$

Ces équations donnent les nouvelles coordonnées homogènes

d'un point quelconque de l'espace en fonction des anciennes ; ce sont donc les formules de transformation cherchées ; elles prouvent que les premières sont exprimées par des formes linéaires des autres, dont les coefficients ont une signification évidente.

On peut procéder d'une manière analogue lorsqu'il s'agit de plans.

Il va sans dire que pour les formes géométriques de la première et de la deuxième espèce ces calculs sont applicables encore, mais ils sont encore plus simples, et mènent à des conclusions toutes pareilles.

G. LORIA.

Gênes. juin 1902.
