Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 4 (1902)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: UNE LEÇON DE GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE SUR LES AXES OBLIQUES DANS L'ESPAGE

Autor: Cailler, C.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-5589

UNE LEÇON DE GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

SUR LES AXES OBLIQUES DANS L'ESPACE

Il n'est pas, je crois, de professeur de Géométrie analytique qui n'ait eu l'occasion de remarquer l'embarras de ses élèves lorsqu'ils ont à se servir d'un système d'axes obliques dans la résolution d'un problème.

Cette maladresse est surtout apparente en Géométrie à trois dimensions, où la complication des formules est plus grande ; elle est due au manque d'habitude, mais provient aussi, pour une part, du fait que beaucoup de traités usuels ne présentent pas la question des axes obliques avec toute la clarté et l'ampleur qu'elle comporte, et emploient uniquement le système trirectangle dans les applications, même les plus simples.

Il n'est pas jusqu'aux plus grands géomètres qui n'aient commis parfois des inadvertances dans l'emploi des systèmes obliques. Tous les mathématiciens connaissent le passage fautif de la Mécanique analytique (1re partie, section II, § 15) et le Mémoire dans lequel Poinsot a le premier signalé et rectifié l'erreur de Lagrange.

Cependant le cas général des axes obliques a, au point de vue pratique, une grande importance ; je n'ai besoin que de rappeler l'usage si fréquent qui en est fait en Cristallographie, dans la Théorie des surfaces, celle des coordonnées curvilignes, etc. En outre, ce chapitre de Géométrie offre une excellente occasion pour revoir, à un point de vue plus élevé que dans les éléments, la Trigonométrie sphérique en la rattachant à la théorie algébrique des formes adjointes qui reçoit de ce fait une interprétation très claire. Enfin, la complication des formules peut être facilement levée par l'emploi de notations convenables rendant les formules presque aussi simples dans ce cas que dans celui des axes rectangulaires.

J'ai pensé que, précisément à cause du caractère élémentaire du sujet, l'étude qu'on va lire était de nature à intéresser quelques professeurs; elle n'a, cela va sans dire, aucune prétention à l'originalité et n'est, à peu de chose près, que la reproduction de la leçon sur les axes obliques dans le cours de Géométrie analytique professé par moi deux années de suite à l'Université de Genève. Tout au plus me permettrai-je d'attirer l'attention du lecteur sur l'interprétation géométrique remarquable de l'équation (14); on connaît le rôle fondamental joué par cette identité dans diverses théories, la théorie arithmétique des formes ternaires, par exemple.

On voudra bien me pardonner d'avoir modifié quelque peu le sens de termes aussi employés que ceux de *coordonnées* et de *forme adjointe.*

Je ne crois pas devoir présenter ici d'applications; le lecteur en trouvera sans peine d'intéressantes, telles le changement d'axes sous la forme la plus générale, la rotation d'un vecteur autour d'une droite donnée et les formules de O. Rodrigues, la réduction en coordonnées obliques de forces appliquées à un solide, etc.

§ 1. Considérons trois axes OX_1, OX_2, OX_3 non situés dans le même plan. Ils prendront le nom d'*axes coordonnés* et les plans qu'ils déterminent deux à deux celui de *plans coordonnés*. Nous représenterons symétriquement par ξ_1, ξ_2, ξ_3, les angles des axes deux à deux, tandis que les angles dièdres seront désignés par $180^\circ-\xi'_1$, $180^\circ-\xi'_2$, $180^\circ-\xi'_3$. En prenant, du point O, la perspective du trièdre sur la surface d'une sphère ayant ce point pour centre, on obtient un triangle sphérique dans lequel ξ_1, ξ_2, ξ_3 sont les côtés, et $180^\circ-\xi'_1$, $180^\circ-\xi'_2$, $180^\circ-\xi'_3$ les angles. Ces six éléments du trièdre sont donc liés par les formules de la Trigonométrie sphérique qui en laissent trois arbitraires. Toutefois, nous ne supposerons pas connues ces formules qui vont résulter d'elles-mêmes des développements dans lesquels nous allons entrer.

Au trièdre coordonné, nous associerons toujours le trièdre *supplémentaire* défini comme suit. Sur la face X_2OX_3, du même côté de cette face que la troisième arête OX_1, élevons la perpendiculaire OX'_1 ; tirons de même les deux autres normales OX'_2, OX'_3. Les trois axes OX'_1, OX'_2, OX'_3 forment le *trièdre supplémentaire ;* réciproquement, comme on le démontre immédiatement, le trièdre primitif est le supplémentaire du trièdre OX'_1, OX'_2, OX'_3. Les éléments de ce dernier sont ξ'_1, ξ'_2, ξ'_3 pour les faces, $180^\circ\text{-}\xi_1$, $180^\circ\text{-}\xi_2$, $180^\circ\text{-}\xi_3$ pour les dièdres.

Nous dirons quelquefois que les deux trièdres définis comme il vient d'être dit sont *adjoints* l'un de l'autre.

Ajoutons encore aux notations précédentes une remarque évidente. L'angle $X_1OX'_1$, nécessairement aigu, est le complément de l'inclinaison de la droite OX_1 sur la face X_2OX_3 ; c'est aussi, pour la même raison, le complément de l'inclinaison de OX'_1 sur la face $X'_2OX'_3$. Les angles $X_2OX'_2$ et $X_3OX'_3$ ont une signification analogue ; nous représenterons ces trois angles par $90^\circ\text{-}i_1$, $90^\circ\text{-}i_2$, $90^\circ\text{-}i_3$.

§ 2. Soit maintenant un vecteur OP unissant l'origine O à un point donné P de l'espace : ce vecteur peut être déterminé algébriquement à l'aide du trièdre coordonné de plusieurs manières.

1° Par le point P menons trois plans parallèles aux faces du trièdre OX_1, OX_2, OX_3 ; les segments que ces plans détachent sur ces axes, affectés des signes + ou — selon qu'ils sont portés sur les axes eux-mêmes ou sur leurs prolongements, se nomment les *composantes* du vecteur OP et nous les représenterons par les lettres x_1, x_2, x_3. Tout vecteur a ses trois composantes et réciproquement à trois nombres x_1, x'_2, x_3, choisis arbitrairement, correspond toujours un vecteur et un seul, car trois plans parallèles aux faces d'un trièdre se coupent toujours en un point unique.

Remarquons que les trois plans parallèles aux plans coordonnés et ces plans eux-mêmes forment un parallélipipède dont OP est une diagonale. Si, partant de O, on trace successivement trois arêtes de ce parallélipipède non situées dans un même plan, on aboutira à P, et les trois arêtes ainsi décrites seront en grandeur les composantes du vecteur OP. Il existe six tracés semblables conduisant de O à P ; nous les nommerons les *contours des composantes*.

2° Abaissons de P trois plans perpendiculaires sur les axes

OX_1, OX_2, OX_3 ; les segments déterminés sur ces axes, évalués avec la même règle des signes que plus haut, se nommeront les *projections* du vecteur OP et nous les représenterons par p_1, p_2, p_3. Il est clair que tout vecteur a trois projections déterminées ; réciproquement à trois nombres, arbitrairement choisis comme projections, correspond toujours un vecteur et un seul.

3° En utilisant le trièdre adjoint OX'_1, OX'_2, OX'_3, de la même manière que le trièdre OX_1, OX_2, OX_3, on voit que le vecteur OP pourra encore être représenté par les *composantes adjointes* x'_1, x'_2, x'_3 ou les *projections adjointes* p'_1, p'_2, p'_3.

En résumé le même vecteur peut être représenté par l'une quelconque des quatre lignes du tableau suivant :

$$\begin{array}{l} x_1,\ x_2,\ x_3\ ; \\ p_1,\ p_2,\ p_3\ ; \\ x'_1,\ x'_2,\ x'_3\ ; \\ p'_1,\ p'_2,\ p'_3. \end{array}$$

Ce tableau est celui des *coordonnées* du vecteur ; le même terme est souvent appliqué au point P, extrémité du vecteur qui suffit à le définir.

§ 3. Relations entre les coordonnées. — Les explications précédentes montrent qu'une des lignes du tableau précédent est arbitraire ; les autres en sont des fonctions déterminées. Nous nous proposons de trouver les neuf relations qui unissent nos douze coordonnées : ce problème n'existe pas pour le cas d'un trièdre trirectangle, les quatre lignes étant alors identiques.

a) *Relations entre les x et les p'.* — Considérons le plan parallèle à X_2OX_3 et passant par P. Il détache le segment x_1 sur la droite OX_1 ; en outre, comme il est perpendiculaire sur OX'_1, il détache le segment p'_1 sur cette droite. L'angle $X_1OX'_1$ étant égal à $90 - i_1$, et les signes des deux segments x_1 et p_1 étant les mêmes, nous aurons $p'_1 = x_1 \sin i_1$. Ainsi

$$\left.\begin{array}{l} p'_1 = x_1 \sin i_1, \\ p'_2 = x_2 \sin i_2, \\ p'_3 = x_3 \sin i_3. \end{array}\right\} \qquad \text{(I)}$$

b) *Relations entre les x' et les p.* — On les trouvera en raisonnant sur le trièdre adjoint comme nous venons de le faire sur le trièdre primitif. Ainsi

$$\left.\begin{aligned} p_1 &= x'_1 \sin i_1, \\ p_2 &= x'_2 \sin i_2, \\ p_3 &= x'_3 \sin i_3. \end{aligned}\right\} \quad \text{(II)}$$

Les relations (I) et (II) nous montrent que les projections d'un vecteur sont, à des facteurs constants près, égales aux composantes relatives au trièdre adjoint et réciproquement.

c) *Relations entre les p et les x.* — Remarquons que p_1, qui est la projection orthogonale de OP sur OX_1, est aussi la projection orthogonale sur cet axe d'un contour de composantes. En transcrivant cette équivalence, nous trouvons

$$\left.\begin{aligned} p_1 &= x_1 + x_2 \cos\xi_3 + x_3 \cos\xi_2, \\ p_2 &= x_1 \cos\xi_3 + x_2 + x_3 \cos\xi_1, \\ p_3 &= x_1 \cos\xi_2 + x_2 \cos\xi_1 + x_3. \end{aligned}\right\} \quad \text{(III)}$$

d) *Relations entre les p' et les x'.* — Les trois tableaux nous donnent les neuf relations indépendantes cherchées. Toutefois la symétrie des trièdres adjoints permet évidemment d'écrire le tableau

$$\left.\begin{aligned} p'_1 &= x'_1 + x'_2 \cos\xi'_3 + x'_3 \cos\xi'_2, \\ p'_2 &= x'_1 \cos\xi'_3 + x'_2 + x'_3 \cos\xi'_1, \\ p'_3 &= x'_1 \cos\xi'_2 + x'_2 \cos\xi'_1 + x'_3, \end{aligned}\right\} \quad \text{(IV)}$$

système qui ne peut être qu'une conséquence des précédents.

§ 4. *Trigonométrie sphérique.* — Nous trouverons des relations entre les coefficients en éliminant les x, x', p, p' entre les quatre tableaux de formules (I), (II), (III), (IV). Pour les former d'une manière régulière, remplaçons dans la première équation (IV) les p' et x' par leurs valeurs en x et p tirées de (I) et (II), il vient

$$x_1 \sin i_1 = \frac{p_1}{\sin i_1} + \frac{p_2}{\sin i_2} \cos\xi'_3 + \frac{p_3}{\sin i_3} \cos\xi'_2 ;$$

mais en résolvant directement les équations (III), par rapport à x_1 nous trouvons

$$Dx_1 = p_1 \sin^2\xi_1 + p_2 (\cos\xi_1 \cos\xi_2 - \cos\xi_3) + p_3 (\cos\xi_1 \cos\xi_3 - \cos\xi_2).$$

où D désigne le déterminant

$$D = \begin{vmatrix} 1 & \cos\xi_3 & \cos\xi_2 \\ \cos\xi_3 & 1 & \cos\xi_1 \\ \cos\xi_2 & \cos\xi_1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Les valeurs de x_1 tirées des deux formules précédentes sont forcément identiques et leur comparaison nous donne les formules

$$\sin^2 i_1 \sin^2\xi_1 = \sin^2 i_2 \sin^2\xi_2 = \sin^2 i_3 \sin^2\xi_3 = D,$$
$$\cos\xi_3 = \cos\xi_1 \cos\xi_2 - \sin\xi_1 \sin\xi_2 \cos\xi'_3,$$

et les analogues de cette dernière obtenues par la permutation circulaire des indices. De la première ligne il résulte que le déterminant D est constamment différent de zéro, positif, plus petit que l'unité sauf pour le cas d'un trièdre trirectangle où il devient égal à un. On peut donc écrire plus simplement

$$\sin i_1 \sin\xi_1 = \sin i_2 \sin\xi_2 = \sin i_3 \sin\xi_3 = \sqrt{D}, \tag{1}$$
$$\cos\xi_3 = \cos\xi_1 \cos\xi_2 - \sin\xi_1 \sin\xi_2 \cos\xi'_3. \tag{2}$$

On doit ajouter à ces équations celles qu'on trouve en alternant le rôle des trièdres adjoints

$$\sin i_1 \sin\xi'_1 = \sin i_2 \sin\xi'_2 = \sin i_3 \sin\xi'_3 = \sqrt{D'}, \tag{1'}$$
$$\cos\xi'_3 = \cos\xi'_1 \cos\xi'_2 - \sin\xi'_1 \sin\xi'_2 \cos\xi_3. \tag{2'}$$

Divisons les équations (1) par les (1′) correspondantes, on a

$$\frac{\sin\xi_1}{\sin\xi'_1} = \frac{\sin\xi_2}{\sin\xi'_2} = \frac{\sin\xi_3}{\sin\xi'_3} = \sqrt{\frac{D}{D'}}. \tag{3}$$

Les formules (2), (2′) et (3) sont celles de la Trigonométrie sphérique, sauf une légère variante due aux notations adoptées.

Arrêtons-nous un instant sur la quantité $\sqrt{D}$, souvent nommée *sinus du trièdre*. Voici la raison de cette dénomination.

Si l'on considère un triangle de côtés a et b comprenant entre eux l'angle C, sa surface vaut $\frac{1}{2}ab \sin C$. De même, coupons le trièdre OX_1, OX_2, OX_3 par un plan détachant les trois segments a_1, a_2, a_3 ; le tétraèdre ainsi formé a pour mesure $\frac{1}{6} a_1 a_2 a_3 \sqrt{D}$. En effet la base $(a_1 a_2)$ a pour surface $\frac{1}{2} a_1 a_2 \sin\xi_3$ et la hauteur est égale à $a_3 \sin i_3$, enfin $\sqrt{D} = \sin i_3 \sin \xi_3$; le volume est donc égal au sixième du produit des arêtes par le *sinus du trièdre* qu'elles forment.

Cette remarque permet de former une autre expression de ce sinus. Supposons la quatrième face du tétraèdre menée perpendiculairement à OX_1, et cette face prise comme base. La valeur du volume qui résulte de cette supposition sera $\frac{1}{6} a_1 a_2 a_3 \sin \xi_2 \sin \xi_3 \sin \xi'_1$, ainsi

$$\sqrt{D} = \sin\xi_2 \sin\xi_3 \sin\xi'_1 = \sin\xi_3 \sin\xi_1 \sin\xi'_2 = \sin\xi_1 \sin\xi_2 \sin\xi'_3. \tag{4}$$

A ces diverses formes de $\sqrt{D}$, joignons celle qui résulte du développement du déterminant

$$D = 1 + 2\cos\xi_1 \cos\xi_2 \cos\xi_3 - \cos^2\xi_1 - \cos^2\xi_2 - \cos^2\xi_3, \tag{5}$$

ou, décomposant le trinôme en $\cos \xi_1$ en deux facteurs du premier degré,

$$D = 4 \sin \frac{\xi_2 + \xi_3 - \xi_1}{2} \sin \frac{\xi_3 + \xi_1 - \xi_2}{2} \sin \frac{\xi_1 + \xi_2 - \xi_3}{2}. \tag{6}$$

Enfin, si dans la relation (4), on substitue la valeur de $\sin \xi'$ tirée de la proportion des sinus, nous trouvons

$$D = \sin\xi_1 \sin\xi_2 \sin\xi_3 \sqrt{D'},$$

ou

$$D' = \frac{D^2}{\sin^2\xi_1 \sin^2\xi_2 \sin^2\xi_3},$$

et de même

$$D = \frac{D'^2}{\sin^2\xi'_1 \sin^2\xi'_2 \sin^2\xi'_3}. \tag{7}$$

Ces diverses formules permettent de former sans peine le sinus du trièdre en fonction de trois quelconques des six éléments $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi'_1, \xi'_2, \xi'_3$.

§ 5. *Changement de notations.* — Nous laisserons de côté le trièdre supplémentaire et nous n'emploierons plus que le trièdre OX_1, OX_2, OX_3. Pour plus de clarté nous désignerons maintenant les axes par OX, OY, OZ, les faces du trièdre par ξ, η, ζ, ses dièdres par $180°-\xi'$, $180°-\eta'$, $180°-\zeta'$. Un vecteur OP sera déterminé par ses composantes (x, y, z) ou ses projections

(p, q, r) : on a vu plus haut que ces six quantités sont liées par les équations

$$\left.\begin{aligned} x + y\cos\zeta + z\cos\eta &= p, \\ x\cos\zeta + y + z\cos\xi &= q, \\ x\cos\eta + y\cos\xi + z &= r; \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

et $\sqrt{D}$ étant le sinus du trièdre des axes,

$$\left.\begin{aligned} p\sin^2\xi + q\sin\xi\sin\eta\cos\zeta' + r\sin\zeta\sin\xi\cos\eta' &= Dx, \\ p\sin\xi\sin\eta\cos\zeta' + q\sin^2\eta + r\sin\eta\sin\zeta\cos\xi' &= Dy, \\ p\sin\zeta\sin\xi\cos\eta' + q\sin\eta\sin\zeta\cos\xi' + r\sin^2\zeta &= Dz, \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

qui permettent de déterminer x, y, z en fonction de p, q, r et réciproquement. Nous verrons qu'il y a souvent avantage, au point de vue de la simplicité des formules, à conserver les six quantités.

§ 6. *Les deux problèmes métriques fondamentaux.* — Toute question de Géométrie pouvant être ramenée à des évaluations de longueurs ou d'angles, il importe de trouver deux formules, servant à mesurer la première la grandeur l d'un vecteur $OP(x, y, z; p, q, r)$, la seconde l'inclinaison i de deux vecteurs $OP(x, y, z; p, q, r)$ et $OP'(x', y', z'; p', q', r')$.

a) *Longueur.* — Soient pour un instant α, β, γ les angles que fait le vecteur OP avec les axes coordonnés, de sorte que $p = l\cos\alpha$, $q = l\cos\beta$, $r = l\cos\gamma$. Projetons un contour de composantes sur OP, nous trouverons l comme projection, ainsi $l = x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma$; et tenant compte des égalités précédentes.

$$l^2 = px + qy + rz. \tag{10}$$

Cette formule est la plus simple ; si l'on veut exprimer l en fonction des composantes seules ou des projections seules, il suffira d'éliminer p, q, r ou x, y, z à l'aide des relations (8) ou (9), ce qui donne

$$l^2 = f_1(x, y, z), \tag{10'}$$

$$l^2 = f_2(p, q, r), \tag{10''}$$

en faisant pour abréger

$$\begin{aligned} f_1(x, y, z) &= x^2 + y^2 + z^2 + 2yz\cos\xi + 2zx\cos\eta + 2xy\cos\zeta, \\ Df_2(p, q, r) &= p^2\sin^2\xi + q^2\sin^2\eta + r^2\sin^2\zeta + 2qr\sin\eta\sin\zeta\cos\xi' \\ &\quad + 2rp\sin\zeta\sin\xi\cos\eta' + 2pq\sin\xi\sin\eta\cos\zeta'; \end{aligned}$$

ces deux polynômes prendront le nom de *première et seconde* *forme fondamentale* du trièdre coordonné. Revenant un instant au trièdre supplémentaire, j'observe que les composantes adjointes x', y', z', ont les expressions suivantes en p, q, r

$$x' = p\,\frac{\sin\xi}{\sqrt{D}} \qquad y' = q\,\frac{\sin\eta}{\sqrt{D}} \qquad z' = r\,\frac{\sin\zeta}{\sqrt{D}},$$

ainsi on a

$$f_2(p, q, r) = x'^2 + y'^2 + z'^2 + 2y'z'\cos\xi' + 2z'x'\cos\eta' + 2x'y'\cos\zeta',$$

pour cette raison, on nomme souvent *adjointes* les deux formes $f_1(x, y, z)$ et $f_2(p, q, r)$ [1].

Remarquons enfin que les équations (8) et (9) peuvent s'écrire d'une manière très condensée

$$\left.\begin{aligned} p &= \frac{1}{2}\frac{\partial f_1}{\partial x}, & q &= \frac{1}{2}\frac{\partial f_1}{\partial y}, & r &= \frac{1}{2}\frac{\partial f_1}{\partial z}, \\ x &= \frac{1}{2}\frac{\partial f_2}{\partial p}, & y &= \frac{1}{2}\frac{\partial f_2}{\partial q}, & z &= \frac{1}{2}\frac{\partial f_2}{\partial r}, \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Nous avons tout à l'heure considéré les angles directeurs α, β, γ; ces angles ne sont pas indépendants. En effet remplaçons dans (10'') p, q, r par leurs valeurs $l\cos\alpha$, $l\cos\beta$, $l\cos\gamma$ il vient

$$f_2(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma) = 1.$$

b) *Problème des angles.* — Soient OP $(x, y, z;\ p, q, r)$ et OP' $(x', y', z';\ p', q', r')$ les deux vecteurs, l et l' leurs longueurs, i leur angle, α, β, γ les angles directeurs du premier. En projetant sur OP le contour des composantes x', y', z', ou le vecteur OP', on obtient deux résultats égaux : donc

$$l'\cos i = x'\cos\alpha + y'\cos\beta + z'\cos\gamma;$$

multiplions par l et remplaçons $l\cos\alpha$, $l\cos\beta$, $l\cos\gamma$ par p, q, r, il vient

$$ll'\cos i = px' + qy' + rz', \tag{12}$$

et par symétrie

$$ll'\cos i = p'x + q'y + r'z. \tag{12'}$$

---

[1] On sait qu'on appelle ordinairement en Algèbre *adjointe* de la forme $f_1(x,y,z)$. la forme $Df_2(p, q, r)$. — On pourrait généraliser les formules du texte en convenant que les longueurs des trois composantes x, y, z sont rapportées à des unités différentes ; la forme $f_1(x, y, z)$ deviendrait alors un polynôme homogène du deuxième degré quelconque ; cette généralisation est importante, en particulier dans la théorie des surfaces ; je me bornerai toutefois à la signaler.

Les formules (12 et (12′) donnent en éliminant les projections ou les composantes

$$ll' \cos i = \frac{1}{2}\left(x \frac{\partial f_1}{\partial x'} + y \frac{\partial f_1}{\partial y'} + z \frac{\partial f_1}{\partial z'}\right) = \frac{1}{2}\left(x' \frac{\partial f_1}{\partial x} + y' \frac{\partial f_1}{\partial y} + z' \frac{\partial f_1}{\partial z}\right), \quad (12'')$$

$$ll' \cos i = \frac{1}{2}\left(p \frac{\partial f_2}{\partial p'} + q \frac{\partial f_2}{\partial q'} + r \frac{\partial f_2}{\partial r'}\right) = \frac{1}{2}\left(p' \frac{\partial f_2}{\partial p} + q' \frac{\partial f_2}{\partial q} + r' \frac{\partial f_2}{\partial r}\right), \quad (12''')$$

expressions qu'on peut aisément développer.

Ainsi pour trouver l'inclinaison i de deux droites ayant respectivement pour angles directeurs α, β, γ et α', β', γ' il suffira de remplacer dans ($12'''$) l et l' par l'unité puis de faire $p = \cos\alpha$, $q = \cos\beta$, $r = \cos\gamma$, $p' = \cos\alpha'$, etc.

c) *Deuxième solution du problème précédent.* — Bien que les formules précédentes résolvent sans ambiguïté le problème des angles, il est indispensable d'en posséder une autre solution donnant l'angle par son sinus : elle va se présenter sous une forme très différente de la précédente.

Nommons OL et OL′ deux vecteurs auxiliaires ayant le premier pour composantes

$$X = qr' - rq', \qquad Y = rp' - pr', \qquad Z = pq' - qp',$$

et le second pour projections

$$P = yz' - zy', \qquad Q = zx' - xz', \qquad R = xy' - yx'.$$

Chacun de ces vecteurs est perpendiculaire sur le plan OP, OP′; en effet on a, en vertu des conditions de perpendicularité (formules 12 et 12′), pour le premier

$$pX + qY + rZ = 0, \qquad p'X + q'Y + r'Z = 0.$$

et pour le deuxième

$$xP + yQ + zR = 0, \qquad x'P + y'Q + z'R = 0.$$

Ainsi les droites OL et OL′ ont la même direction; en se reportant alors à la première formule (8) on voit qu'on peut écrire l'identité

$$X + Y\cos\zeta + Z\cos\eta = \alpha P,$$

où la constante α représente le rapport des longueurs $\frac{L}{L'}$ de ces droites.

Si l'on remplace dans X, Y, Z, les quantités p, q, r, etc., par leurs valeurs en x, y, z, la comparaison des deux membres de la dernière équation écrite, donne, par un calcul un peu long, mais sans difficulté, $\alpha = D$ ou $L = L'D$.

Appliquons enfin aux deux droites OL, OL' la formule (12); on a

$$\pm DL'^2 = PX + QY + RZ, \tag{13}$$

le signe étant + ou — selon que OL et OL' sont de même sens ou de sens opposé. Le second membre est d'ailleurs égal au déterminant

$$\begin{vmatrix} px + qy + rz & px' + qy' + rz' \\ p'x + q'y + r'z & p'x' + q'y' + r'z' \end{vmatrix},$$

ou, en vertu des formules (10) et (12) à la quantité

$$l^2l'^2 - l^2l'^2 \cos^2 i = l^2l'^2 \sin^2 i.$$

Ainsi les deux membres de (13) sont positifs et l'on a

$$L = ll'\sqrt{D} \sin i, \qquad L' = \frac{ll'}{\sqrt{D}} \sin i,$$

formules qui nous donnent les longueurs des vecteurs auxiliaires OL et OL' en fonction du sinus de l'angle cherché.

On vient de voir que OL et OL' sont de même sens; pour trouver ce sens par rapport à celui des vecteurs OP et OP', j'observe qu'il ne peut pas changer tant que l'angle i reste différent de zéro ou de 180°, autrement dit tant que les droites OP et OP' se meuvent sans coïncider. Si OP a pour composantes 1, 0, 0 et OP' pour composantes 0, 1, 0, le vecteur OL' est visiblement porté sur la perpendiculaire au plan XOY du côté de OZ; cette règle est donc générale et les vecteurs OL et OL' sont portés perpendiculairement sur le plan OP, OP' du même côté de ce plan que l'axe OZ par rapport au plan XOY.

Une conséquence importante se déduit de la comparaison de nos deux solutions du problème des angles.

En vertu de la formule (12''), on a

$$l^2l'^2 \cos^2 i = \left[\frac{1}{2}\left(x\frac{\partial f_1}{\partial x'} + y\frac{\partial f_1}{\partial y'} + z\frac{\partial f_1}{\partial z'}\right)\right]^2,$$

et de même en vertu de la formule (10″) appliquée au vecteur P, Q, R,

$$l^2 l'^2 \sin^2 i = \mathrm{D}f_2\ (yz' - zy',\ zx' - xz',\ xy' - yx').$$

D'autre part $l^2 = f_1\ (x,\ y,\ z)$ et $l'^2 = f_1\ (x',\ y',\ z')$; ainsi en additionnant les deux résultats précédents, on a l'identité importante

$$f_1(x, y, z)\ f_1(x', y', z') = \left[\frac{1}{2}\left(x\frac{\partial f_1}{\partial x'} + y\frac{\partial f_1}{\partial y'} + z\frac{\partial f_1}{\partial z'}\right)\right]^2 + \mathrm{D}f_2\ (yz' - zy',\ zx' - xz',\ xy' - yx'). \quad (14)$$

qui peut facilement s'étendre à une forme ternaire quelconque et à son adjointe.

§ 7. *Signification métrique de l'équation du plan.* — Nous terminons cette leçon en cherchant l'équation générale d'un plan.

Soit P celui-ci, p sa distance à l'origine, R le pied de la perpendiculaire abaissée sur lui de l'origine ; a, b, c les projections d'un vecteur normal au plan, enfin x, y, z les composantes d'un point A quelconque de l'espace (on dit le plus souvent, d'une manière absolue, les coordonnées de ce point). La distance de A à P est égale à la projection de OA sur OR diminuée de p : ainsi, par la formule (12)

$$\pm \text{distance} = \frac{ax + by + cz}{f_2\ (a, b, c)} - p.$$

Si le point A est dans le plan, cette distance est nulle, donc

$$ax + by + cz - pf_2\ (a, b, c) = 0$$

sera l'équation du plan ; elle affecte la forme générale du premier degré

$$\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0.$$

Réciproquement toute équation de cette forme sera celle d'un plan perpendiculaire au vecteur dont les trois projections sont α, β, γ, à la distance $\dfrac{\delta}{f_2\ (\alpha, \beta, \gamma)}$ de l'origine, comptée suivant le vecteur (α, β, γ), si δ est négatif et suivant son prolongement si δ est positif.

On sait que cette même équation peut être trouvée par des considérations de géométrie projective, le sens des constantes α, β, γ, δ est alors moins simple.

C. Cailler (Genève).