Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 4 (1902)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LES IDÉES DE HERTZ SUR LA MÉCANIQUE
Autor: Combebiac, G.
Kapitel: DEUXIÈME PARTIE MÉECANIQUE DES SYSTÈMES MATÉRIELS
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-5588

les mouvements comparés présentant, pour la position considérée, la même vitesse en grandeur et en direction.

On voit que les propositions générales de la mécanique des systèmes à liaisons prennent, moyennant la terminologie de Hertz, une forme particulièrement simple.

Il est juste d'observer qu'une terminologie analogue, peut-être un peu moins heureuse, avait déjà été exposée par Julius Kœnig (1).

DEUXIÈME PARTIE

MÉCANIQUE DES SYSTÈMES MATÉRIELS

Dans cette partie de son ouvrage, Hertz s'est proposé d'édifier la Mécanique rationnelle, moyennant son hypothèse et sa terminologie, suivant une ordonnance parfaitement logique.

En fait il ne s'agit pas d'autre chose que de supprimer la force en tant que notion primordiale.

Les notions d'espace, de temps et de masse étant supposées acquises, les liaisons entre les masses étant supposées indépendantes du temps et soumises aux restrictions déjà indiquées, Hertz appelle *libre* un système matériel dont les liaisons sont *internes*, c'est-à-dire n'intéressent que les *positions relatives* des points du système, ou, plus nettement, permettent tout déplacement sans déformation du système.

Hertz pose à priori, comme loi fondamentale de la Mécanique, la loi du mouvement des systèmes libres, savoir :

Tout système libre décrit une trajectoire de moindre courbure avec une vitesse constante.

Par hypothèse, tout système non libre fait partie d'un système libre, et son mouvement peut par conséquent, au moins théoriquement, être déterminé au moyen de la loi fondamentale.

Telle est l'économie générale de l'édifice logique construit par Hertz.

Sa terminologie lui a permis d'exprimer sous forme de loi unique les propriétés du mouvement des systèmes libres.

---

(1) JULIUS KŒNIG, *Interpretation der fundamental Gleichungen der Dynamik. Math. Annalen*, 1888, t. XXXI.

Son hypothèse sur la nature de la force, réduite à n'être qu'une manifestation du mouvement de masses perceptibles ou latentes, lui permet de construire la Mécanique au moyen des seules notions d'espace, de temps et de masse.

De la loi fondamentale Hertz déduit facilement, pour les systèmes libres, les équations de Lagrange ainsi que toutes les propositions générales de la mécanique, *y compris les principes du centre de gravité et des aires*.

Tout système matériel dont le mouvement n'est pas régi par la loi fondamentale, doit être considéré comme lié à des masses ne faisant pas partie du système.

Soient $q_1, q_2, \ldots, q_r$ les paramètres du système partiel considéré et $p_1, p_2, \ldots, p_s$, les paramètres déterminant les positions des autres masses du système total.

Une équation de liaison sera de la forme

$$\Sigma\, \mathrm{A}dq + \Sigma\, \mathrm{B}dp = 0.$$

Un cas particulièrement simple est celui où les masses extérieures au système q restent fixes, c'est-à-dire où $dp = 0$.

Dans ce cas, les équations de condition expriment simplement que ce système est soumis à des liaisons indépendantes du temps et, quoique non libre, il aura son mouvement régi par la loi fondamentale, ce qui devrait être, puisque, en partant des principes habituels de la Mécanique, nous avons établi une loi pour tous les systèmes à liaisons, libres ou non libres, sur lesquels ne s'exerce aucune autre force que celles dues aux liaisons, le mot *force* étant employé dans son sens habituel.

Il n'est peut-être pas sans intérêt de remarquer, notamment pour la recherche de la signification des principes du centre de gravité et des aires, que, dans tous les cas de la nature où les liaisons d'un système ne lui permettent pas tous les déplacements sans déformation, l'on peut toujours lui adjoindre des masses *perceptibles*, c'est-à-dire des corps solides, liquides ou gazeux, telles que les liaisons deviennent *internes*.

Revenons au cas général.

Le terme dû à la liaison considérée dans l'équation de Lagrange relative à la coordonnée q sera de la forme $\lambda \mathrm{A}$.

Si l'on regarde comme connu le mouvement des masses ne faisant pas partie du système partiel des q, le coefficient λ sera déterminé de la manière habituelle en se servant de l'équation de liaison, qui prend la forme

$$\Sigma \, A dq + C dt = 0,$$

en posant

$$\Sigma B \frac{dp}{dt} = C,$$

et l'on voit facilement que le résultat concorde avec celui que donne le principe de d'Alembert étendu au cas des liaisons dépendantes du temps.

Ainsi s'expliquerait la validité de ce dernier principe.

La notion de force. — Hertz, pour introduire la notion de force, considère une sorte de liaison susceptible de s'exprimer par l'égalité d'un ou plusieurs paramètres d'un autre système. Cette sorte de liaison est appelée par Hertz *accouplement* (*Koppelung*).

Si q et p sont respectivement des paramètres égaux des deux systèmes, l'équation de condition

$$q = p \quad \text{ou} \quad \delta q - \delta p = 0$$

donnera naissance, dans les équations de Lagrange relatives respectivement à q et à p, à des termes égaux et de signes contraires, de sorte que, si Q est le terme dû à la liaison dans l'équation relative à q et P le terme analogue dans l'équation relative à p, on aura

$$Q = -P.$$

Nous voici parvenus au point vital de l'ouvrage de Hertz, à l'introduction de la notion de force.

Nous tombons en même temps en pleine obscurité. Aussi croyons-nous ne pouvoir mieux faire que de mettre sous les yeux du lecteur une traduction littérale du texte même, en supprimant seulement les démonstrations ainsi que certaines considérations étrangères à la question qui nous occupe.

Définition. — Sous la dénomination de force, nous entendons l'influence que l'un des deux systèmes accouplés exerce sur l'autre en raison de la loi fondamentale.

Conséquence. — A chaque force correspond nécessairement une réaction (Gegenkraft).

Car. . . . .

Représentation analytique de la force. — Nous pouvons et voulons donc, en concordance avec la définition, poser que l'ensemble des quantités P déterminées pour toutes les coordonnées p doit constituer l'expression analytique de la force, que le système des p exerce sur le système des q. Les quantités P ou encore Q s'appellent les composantes de la force suivant les coordonnées correspondantes p ou q, ou simplement les forces suivant ces coordonnées.

Par cette détermination nous établissons la concordance avec la désignation actuelle de la mécanique, et la nécessité de réaliser cet accord justifie suffisamment le choix que nous avons fait parmi plusieurs déterminations possibles.

Conséquence. — La force qu'un système exerce sur un autre peut être considérée comme une quantité vectorielle relative au deuxième système, dont les composantes suivant les coordonnées communes sont en général différentes de zéro, dont les composantes suivant les coordonnées non communes s'annulent, enfin dont les composantes suivant les directions qui ne peuvent s'exprimer par les variations des coordonnées employées restent indéterminées.

Deuxième conséquence. — La force qu'un système exerce sur un autre peut être considérée aussi bien comme une quantité vectorielle relative au premier système.

. . . .

L'action et la réaction sont égales et opposées. On doit entendre par là que leurs composantes, suivant chacune des coordonnées employées, sont égales et opposées, et cela, que l'on considère la force comme une quantité vectorielle dans un ou dans l'autre système.

Car. . . . .

Remarque 1. — La proposition précédente correspond à la Lex tertia de Newton et est dénommée le principe de la réaction. Pourtant son contenu ne coïncide pas complètement avec le contenu de cette troisième loi, leur rapport exact est le suivant :

La loi de Newton contient complètement notre proposition, suivant les vues de son auteur, comme le montrent les exemples mis à l'appui de la loi. Mais la loi de Newton contient davantage. Du moins elle est généralement appliquée aux actions à distance, c'est-à-dire aux forces qui s'exercent entre deux corps n'ayant pas de coordonnées communes.

Mais notre mécanique ne connaît pas de telles forces. C'est ainsi que, pour que l'on puisse, par exemple, déduire de notre proposition la conséquence qu'une planète attire le soleil avec une force égale à celle avec laquelle elle est attirée par lui, il est nécessaire d'avoir des données plus intimes sur la nature de la liaison existante entre les deux corps.

Remarque 2. — On peut se demander si le surplus que présente le principe de la réaction sur notre proposition peut figurer à juste titre parmi les lois fondamentales de la Mécanique ou si, au contraire, la partie essentielle et valable en toute généralité de ce principe, ne consiste pas dans notre proposition.

En ce qui concerne la forme, la portée de la troisième loi, dans son application aux actions à distance, n'est pas clairement exprimée. Car, si la force et la réaction sont appliquées à des corps différents, ce que l'on entend par direction opposée n'est pas net. C'est ce qui arrive, par exemple, lorsqu'il s'agit de l'action réciproque entre deux éléments de courant. En ce qui concerne le contenu, l'application du principe de la réaction aux actions à distance de la Mécanique habituelle, représente évidemment un fait d'expérience dont l'exactitude dans tous les cas commence à devenir douteuse. Ainsi on est presque convaincu que l'action réciproque entre deux particules magnétisées en mouvement ne satisfait pas au principe dans tous les cas.

Des questions se présentent en foule que l'on voudrait poser à Hertz.

Tout d'abord, quelle est la signification physique, s'il en existe une, de cette sorte de liaison que Hertz appelle *accouplement* de deux systèmes et qu'il ne définit que par une propriété analytique, savoir le fait d'avoir les coordonnées communes ?

Incidemment, à propos de la loi de l'égalité de l'action et de la réaction, Hertz nous apprend à ce sujet que les actions à distance sont celles qui s'exercent entre deux corps n'ayant pas de coordonnées communes et que sa mécanique ne connaît pas de telles forces.

Quelle sorte d'incompatibilité Hertz conçoit-il entre le fait analytique d'avoir des coordonnées communes et le fait physique de s'actionner à distance ?

Ce n'est pas que dans cette obscurité on n'aperçoive l'idée directrice.

Hertz songe évidemment à la théorie des systèmes cycliques, qu'il exposera tout à l'heure après son génial créateur, Helmholtz, et tout particulièrement à la théorie cinétique de l'électrodynamique de Maxwell.

L'image mécanique de Maxwell, encore qu'assez imprécise, est pour Hertz le *modèle* de toute explication mécanique.

Or, dans cette théorie, on considère un système matériel hypothétique, dont la force vive dépend des coordonnées des corps perceptibles, ce qui revient à dire qu'il existe entre le système hypothétique et les corps perceptibles une liaison consistant dans le fait d'avoir des coordonnées communes (coordonnées *contrôlables*).

C'est là que nous voyons l'origine de l'idée d'*accouplement*, à laquelle Hertz attache tant d'importance, qu'en dehors d'elle il ne conçoit pas la notion de force.

Il semblerait, à le lire, que c'est grâce à elle que l'on retrouve la loi de l'égalité de l'action et de la réaction ou tout au moins ce qui doit la remplacer.

Mais il n'en est rien. Car, ce que Hertz conserve de cette loi, savoir le principe du centre de gravité et celui des aires, résulte immédiatement de son hypothèse primordiale que toutes les forces sont des forces de liaison.

En effet, les forces de liaison ont un travail nul dans tout déplacement virtuel compatible avec ces liaisons, et en particulier, quand il s'agit d'un système libre, dans tout déplacement sans déformation, ce qui constitue précisément la condition pour que ces forces se fassent équilibre au sens que présente ce dernier mot dans la mécanique des corps indéformables.

Le postulat est au fond celui-ci :

Nous ne saurions concevoir de liaisons ne permettant pas tous les déplacements sans déformation de l'ensemble des masses matérielles intéressées, de sorte que l'existence d'une liaison empêchant un système matériel de se déplacer librement sans déformation, exige toujours la présence de masses matérielles étrangères au système.

Du reste, les forces de liaison peuvent toujours être calculées sans avoir recours à la loi de l'égalité de l'action et de la réaction. Cette dernière loi devient donc complètement inutile, si l'on admet, avec Hertz, qu'il n'existe que des forces de liaison.

J'ajoute qu'en étendant convenablement le postulat ci-dessus, on peut *démontrer*, dans le cas de forces quelconques, les principes du centre de gravité et des aires et, d'une façon générale, calculer l'action exercée par un système sur un autre, connaissant l'action exercée par le second sur le premier, ce qui constitue en somme le rôle de la loi de l'égalité de l'action et de la réaction.

On conclura sans doute, avec nous, que la manière dont Hertz introduit la notion de force, n'est pas pleinement satisfaisante.

Du reste, l'arbitraire qui subsiste dans la détermination de la force quand on la définit, comme le fait Hertz, par certains termes des équations de Lagrange, ne saurait, croyons-nous, convenir à une notion qui, en dehors de toute théorie mécanique, s'impose si naturellement à notre esprit.

N'y a-t-il pas quelque chose de plaisant à vouloir refuser le droit d'existence à la notion de force, alors que, dans la pratique, nous n'éprouvons aucune hésitation à déterminer la direction d'une force et à en mesurer la grandeur.

Certaines, parmi les objections qui se présentent naturellement, quand il s'agit de *définir* (mais non de mesurer effectivement) la grandeur d'une force, ne se présentent-elles pas également pour les notions les mieux établies ?

Considérons, par exemple, les notions associées de longueur et de déplacement sans déformation, qui servent, peut-on dire, de base à la science tout entière.

Si l'on essaie de définir l'égalité (ou la comparaison) de deux longueurs, on est ramené à la notion de déplacement sans déformation. Mais les savants n'ignorent pas qu'il n'existe pas de corps se déplaçant sans déformation. Pour les ignorants, au contraire, il en existe un très grand nombre, et c'est leur notion grossière de corps indéformable qui est la base de la Géométrie, science *pure* par excellence pourtant, et qu'une analyse uu peu subtile découvrirait au fond des conceptions physiques les plus compliquées, notion simple à la vérité, non pas parce qu'elle est obtenue par abstraction, ce qui n'est pas, mais parce qu'elle est le résultat tout inconscient du premier regard que nous jetons sur la nature.

La notion de force, comme celle de longueur, est essentiellement subjective, et il est illusoire d'en chercher une définition purement objective.

Mouvements cycliques. — L'étude des mouvements cycliques est due aux idées qui ont conduit les physiciens à identifier certaines énergies potentielles (chaleur, potentiel électrodynamique, etc.) à l'énergie cinétique.

Hertz termine son ouvrage par un exposé de la théorie des systèmes cycliques. Nous croyons, en raison de l'influence que paraît avoir eue cette théorie dans la genèse des idées de Hertz sur la Mécanique, devoir en rappeler les principes.

Considérons un système matériel dont la position dépende de coordonnées de deux sortes, q et φ, celles-ci n'entrant dans l'expression de la force vive du système que par leurs dérivées, et les premières donnant lieu à une force vive négligeable par rapport à la force vive correspondante aux secondes.

Les coordonnées φ sont appelées *cycliques*.

En somme, en écrivant la force vive

$$T = T_q + T_{q\varphi} + T_\varphi,$$

on ne conserve que le dernier terme et on suppose en outre que les coefficients des carrés et des produits des dérivées $\frac{d\varphi}{dt}$ ne dépendent que des coordonnées q.

Il est clair qu'on ne saurait admettre en toute rigueur que les dérivées des coordonnées q n'entrent pas dans l'expression générale de T. Mais on peut ne considérer que des mouvements dans lesquels les termes contenant ces dérivées sont négligeables par rapport aux termes ne contenant que les dérivées des coordonnées cycliques.

L'équation de Lagrange, pour une coordonnée q, sera de la forme

$$-\frac{\partial T}{\partial q} = P$$

et pour une coordonnée φ,

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \varphi'} = F.$$

Supposons que le système cyclique soit *accouplé* à un système par les paramètres q, c'est-à-dire supposons que ces paramètres q soient constamment égaux respectivement à des paramètres en nombre égal du second système.

Le terme dû au mouvement du système cyclique dans l'équation de Lagrange relative au paramètre du nouveau système considéré égal à q sera — P ou $\frac{\partial T}{\partial q}$, et le travail dans un déplacement de ce dernier système sera

$$d\mathfrak{T} = \Sigma \frac{\partial T}{\partial q} dq.$$

L'expression de T sera, dans deux cas intéressants, uniquement fonction des paramètres q, savoir dans le cas où les dérivées $\frac{d\varphi}{dt} = \varphi'$ sont constantes, et dans le cas où les quantités $\frac{\partial T}{\partial \varphi'}$ sont constantes.

On a, dans le premier cas,

$$d\mathfrak{T} = dT,$$

et dans le second cas,

$$d\mathfrak{T} = -dT.$$

Dans le premier cas, le mouvement est dit isocyclique; dans le second cas, il est dit adiabatique.

On a, dans ce dernier cas,

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \varphi'} = 0,$$

c'est-à-dire que la force exercée sur le système cyclique suivant la coordonnnée φ est nulle.

Le système est alors dit *conservatif*.

L'énergie cinétique T du système cyclique représente le potentiel des forces exercées par ce système sur le système ayant pour paramètre q.

Les propriétés des systèmes cycliques conduisent à des formules intéressantes, qui ont suggéré des théories mécaniques de phénomènes physiques.

Nous ne citerons que la propriété suivante :

Supposons que le système soit monocyclique, c'est-à-dire ne dépende que d'une coordonnée cyclique φ.

Soit dQ le travail de la force cyclique, c'est-à-dire soit

$$dQ = \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \varphi'}\,d\varphi = \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \varphi'} \times \varphi'\,dt = \varphi'\,d\frac{\partial T}{\partial \varphi'}.$$

On a d'autre part

$$T = \frac{1}{2}\frac{\partial T}{\partial \varphi'}\varphi'.$$

D'où

$$\frac{dQ}{T} = 2\,\frac{d\,\frac{\partial T}{\partial \varphi'}}{\frac{\partial T}{\partial \varphi'}} = d\log\left(\frac{\partial T}{\partial \varphi'}\right)^2 = d\log\left(\frac{\partial T}{\partial \varphi'}\right)^2.$$

En posant

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi'} = \Phi,$$

on a

$$\int \frac{dQ}{T} = \log \frac{\Phi^2}{\Phi_0{}^2}.$$

En admettant que la force vive T soit proportionnelle à la température, on aurait là une expression de l'entropie.

Nous nous sommes proposé de faire connaître, dans ces quelques pages, ce qui nous a paru important dans l'ouvrage de Hertz, laissant au lecteur le soin de faire les nombreuses réflexions qu'inspirent le sujet d'abord, les idées de Hertz ensuite.

A titre de conclusion à notre étude, nous donnons l'appréciation suivante émise sur la théorie de Hertz, par M. Poincaré (1) :

« Intéressante à coup sûr, elle ne me satisfait pas entièrement, parce qu'elle fait la part trop grande à l'hypothèse. »

. . . .

« Néanmoins, par cela seul qu'il est nouveau, ce mode d'exposition est utile; il nous force à réfléchir, à nous affranchir de vieilles associations d'idées. Nous ne pouvons pas encore voir le monument tout entier ; c'est quelque chose d'en avoir une perspective nouvelle, prise d'un point de vue nouveau. »

G. Combebiac (Limoges).

---

(1) H. Poincaré, *loc. cit.*