Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 4 (1902)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LES IDÉES DE HERTZ SUR LA MÉCANIQUE

Autor: Combebiac, G.

Kapitel: PREMIÈRE PARTIE GÉOMÉTRIE ET CINÉMATIQUE DES SYSTÈMES MATÉRIELS

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-5588

notion auxiliaire, simplement définie par une expression analytique.

Telle est la conception de Hertz.

L'hypothèse qui en est la base suffit-elle à supprimer la difficulté rencontrée jusqu'ici dans la définition de la force ? On en jugera plus loin d'après l'exposé que nous ferons de la manière dont Hertz introduit cette définition.

PREMIÈRE PARTIE

GÉOMÉTRIE ET CINÉMATIQUE DES SYSTÈMES MATÉRIELS

Liaisons. — Hertz soumet les liaisons à la restriction de pouvoir être représentées par des systèmes d'équations linéaires aux différentielles totales de la forme

$$A_1\,\delta q_1 + A_2\,\delta q_2 + \ldots\ldots + A_n\,\delta q_n = 0,$$

où q_1, q_2, ..., q_n sont les paramètres déterminant la position du système, et les coefficients A_1, A_2, ..., A_n, des fonctions continues de ces paramètres.

On peut dire, d'une manière équivalente, que la somme de deux déplacements infinitésimaux possibles δq et $\delta' q$ à partir d'une même position est un déplacement infinitésimal possible à partir de cette même position (possibilité de superposer les déplacements infinitésimaux compatibles avec les liaisons).

Hertz rattache la forme linéaire des équations de condition à une propriété des liaisons, qu'il désigne sous le nom de *continuité dans l'infinitésimal* et qui consiste dans le fait que *tout déplacement infinitésimal possible peut être obtenu par une trajectoire rectiligne.*

Il résulte d'abord de la continuité des liaisons, entendue au sens ordinaire de ce mot, qu'on peut opérer successivement deux déplacements infinitésimaux δq (δq_1, δq_2, ..., δq_n) et $\delta' q$ ($\delta' q_1$, $\delta' q_2$, ..., $\delta' q_n$) supposés possibles à partir de la position q (q_1, q_2, ..., q_n), car il existe, à partir de la position $q + \delta q$, un déplacement possible ne différant de $\delta' q$ que par des infiniment petits d'ordre supérieur. On peut donc, par ce trajet, faire passer le système de la position q à la position $q + \delta q + \delta' q$.

La condition de Hertz exprime qu'on peut passer en outre de la position q à la position $q + \delta q + \delta' q$ par un trajet rectiligne, ou plutôt, le mot rectiligne n'ayant pas de sens dans l'infinitésimal, que les positions q et $q + \delta q + \delta' q$ appartiennent à une même trajectoire possible, ayant des éléments différentiels du premier et du deuxième ordre continus en cette position.

Nous préférerions l'énoncé suivant, qui nous paraît caractériser les liaisons s'exprimant par des équations linéaires homogènes par rapport aux différentielles des paramètres et qui exprime un fait concret.

Toute trajectoire tracée parmi les positions obtenues par tous les déplacements infinitésimaux possibles à partir d'une position quelconque est une trajectoire possible.

Mouvement d'un point matériel. — Un point assujetti à rester sur une surface fixe et soustrait à toute autre influence, parcourt une géodésique de la surface avec une vitesse constante.

Ce cas est compris dans celui où les coordonnées x, y, z du point sont soumises à une équation différentielle linéaire

$$A dx + B dy + C dz = 0,$$

intégrable ou non.

La loi du mouvement est toujours représentée, en coordonnées rectangulaires, par la formule

$$\frac{d^2x}{dt^2}\,\delta x + \frac{d^2y}{dt^2}\,\delta y + \frac{d^2z}{dt^2}\,\delta z = 0,$$

δx, δy, δz représentant les variations des coordonnées x, y, z du point dans un déplacement virtuel quelconque compatible avec les liaisons.

Cette formule exprime que la direction de l'accélération est, pour toute position, rectangulaire avec tous les déplacements virtuels.

Comme d'ailleurs l'accélération est toujours contenue dans le plan osculateur de la trajectoire, celle-ci se trouve déterminée par la condition que son plan osculateur contienne, en chaque point, la normale à l'élément superficiel déterminé par tous les déplacements virtuels relatifs à ce point.

Les trajectoires ainsi déterminées, très analogues aux géodésiques d'une surface, jouissent comme celles-ci de la propriété d'avoir, en chacun de leurs points, une courbure moindre que les trajectoires qui leur sont tangentes en ce point.

Nous les appellerons, pour cette raison, *trajectoires de moindre courbure*, traduisant ainsi l'expression de Hertz : *geradeste Bahnen*.

Hertz réserve le nom de *géodésique* aux trajectoires déterminées par la condition que la longueur entre deux de leurs points présente une variation nulle, quand on passe à une trajectoire infiniment voisine réunissant ces deux mêmes points.

Toute ligne de moindre courbure est évidemment une géodésique ; mais la réciproque n'est vraie que dans le cas où l'équation de condition est intégrable.

Car, dans le cas contraire, il passe par un point quelconque de l'espace ∞^1 lignes de moindre courbure, et ∞^2 géodésiques, puisque deux points quelconques de l'espace déterminent au moins une géodésique.

La loi du mouvement d'un point soumis à une condition de l'espèce considérée peut donc s'exprimer en disant que *le point décrit une ligne de moindre courbure avec une vitesse constante*.

Systèmes matériels à liaison. — Hertz les aborde directement. Nous avons pensé qu'en rappelant les propriétés du mouvement du point, nous simplifierions l'exposé de ce qui va suivre.

Nous désignerons par x, y, z les coordonnées d'un point quelconque du système, par m sa masse, par ds la longueur d'un élément de sa trajectoire.

Une *trajectoire* du système est l'ensemble des positions occupées par le système dans un mouvement continu.

La *longueur* S d'une trajectoire est définie par la formule

$$\mathrm{M}d\mathrm{S}^2 = \Sigma\, m(dx^2 + dy^2 + dz^2) = \Sigma\, m ds^2,$$

où l'on pose

$$\mathrm{M} = \Sigma\, m.$$

La *vitesse* V du système est définie par la formule

$$\mathrm{V} = \frac{d\mathrm{S}}{dt} = \sqrt{\frac{\mathrm{T}}{\mathrm{M}}},$$

T représentant la force vive.

En indiquant par des accents la dérivation par rapport à S, on a, dans le cas où la force vive est constante,

$$\frac{dx}{dt} = x'V, \qquad \frac{dy}{dt} = y'V, \qquad \frac{dz}{dt} = z'V',$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = x''V^2 + x'\frac{dV}{dt} = x''V^2, \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = y''V^2, \qquad \frac{d^2z}{dt^2} = z''V^2.$$

De la formule fondamentale, qui exprime la loi du mouvement,

$$\Sigma\, m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\,\delta x + \frac{d^2y}{dt^2}\,\delta y + \frac{d^2z}{dt^2}\,\delta z\right) = 0,$$

on déduira donc

$$\Sigma\, m\,(x''\delta x + y''\delta y + z''\delta z) = 0,$$

δx, δy, δz représentant un déplacement virtuel quelconque du système.

Cette dernière formule va nous permettre de déterminer les éléments différentiels du second ordre de la trajectoire en fonction de ses éléments différentiels du premier ordre.

Nous avons admis que les équations de condition étaient de la forme

$$\Sigma\,(Ax' + By' + Cz') = 0.$$

En dérivant les premiers membres par rapport à S, on obtient des équations égalant des expressions telles que $\Sigma(Ax'' + By'' + Cz'')$ à des fonctions des coordonnées x, y, z et de leurs éléments différentiels du premier ordre, x', y', z', de sorte que, si nous considérons les trajectoires donnant lieu aux mêmes valeurs x', y', z' pour les dérivées premières relatives à chacun des points du système, l'on aura, pour les dérivées secondes, des équations de condition de la forme

$$\Sigma\,(A\delta x'' + B\delta y'' + C\delta z'') = 0,$$

c'est-à-dire que les variations $\delta x''$, $\delta y''$, $\delta z''$ seront soumises aux mêmes conditions que les variations δx, δy, δz.

La loi du mouvement pourra donc être exprimée par la formule

$$\Sigma\, m\,(x''\delta x'' + y''\delta y'' + z''\delta z'') = 0$$

ou

$$\delta \Sigma m (x''^2 + y''^2 + z''^2) = 0.$$

Hertz appelle *courbure* d'une trajectoire la quantité c définie par la formule

$$Mc^2 = \Sigma m (x''^2 + y''^2 + z''^2).$$

En outre, deux trajectoires passant par une même position y sont dites *tangentes*, lorsque, pour chacun des points du système, les dérivées x', y', z' ont respectivement les mêmes valeurs dans les deux trajectoires, c'est-à-dire que, dans deux trajectoires tangentes, tout point matériel du système décrit deux trajectoires tangentes, et le rapport des vitesses est le même pour tous les points du système.

Moyennant ces définitions, la loi du mouvement peut être exprimée en disant qu'un système à liaison, soustrait à toute autre influence, *parcourt avec une vitesse constante une trajectoire de moindre courbure*, en appelant, comme dans le cas du point, *trajectoire de moindre courbure* une trajectoire qui présente, en chacune des positions qui la composent, une courbure moindre que toutes les trajectoires possibles qui lui sont tangentes en cette position.

Hertz, voulant faire un exposé didactique de la Mécanique sans employer les principes ordinaires, pose cette loi comme un principe expérimental en tête de la deuxième partie de son livre.

Nous avons préféré déduire tout d'abord ladite loi des principes de d'Alembert et des travaux virtuels et montrer qu'on est ainsi conduit naturellement à la terminologie de Hertz, terminologie que nous allons maintenant brièvement compléter.

Comme dans le cas du point, on distingue les *géodésiques* des *trajectoires de moindre courbure*, ces deux espèces de trajectoires se confondant, lorsque les équations de condition sont intégrables, c'est-à-dire lorsqu'il est possible de déterminer la position du système au moyen d'un certain nombre de paramètres indépendants.

Les trajectoires *rectilignes* sont celles dont la courbure est nulle, c'est-à-dire pour lesquelles on a

$$x'' = 0, \qquad y'' = 0, \qquad z'' = 0,$$

ou encore dans lesquelles les divers points du système décrivent des lignes droites, les espaces parcourus dans le même temps par tous les points étant proportionnels.

Deux positions déterminent une trajectoire rectiligne, en admettant bien entendu que les points matériels composant le système ne soient soumis à aucune liaison.

La *distance* de deux positions est la longueur de la trajectoire rectiligne réunissant les deux positions.

Cette distance R est donnée par la formule

$$MR^2 = \Sigma\, m\,[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2] = \Sigma\, mr^2.$$

L'*angle* ω de deux trajectoires rectilignes est défini par la formule suivante

$$\sqrt{\Sigma\, mr^2}\,\sqrt{\Sigma\, mr'^2}\cos\omega = \Sigma\, mrr'\cos\theta$$

ou

$$MRR'\cos\omega = \Sigma\, mrr'\cos\theta.$$

On vérifiera que la courbure d'une trajectoire est égale au rapport de l'angle de deux éléments infiniment voisins à la longueur de l'arc correspondant.

On définit le *parallélisme* de deux trajectoires rectilignes par la condition que leur angle soit nul.

En d'autres termes, les droites décrites par un même point matériel dans les deux trajectoires sont parallèles.

On parvient ainsi à la notion de *direction*.

Deux directions sont *rectangulaires* quand leur angle est égal à $\frac{\pi}{2}$.

La condition s'exprime, en désignant par α, β, γ et α', β', γ' les cosinus directeurs des déplacements du point de masse m dans les deux trajectoires rectilignes, par la formule

$$\Sigma\, m\,(\alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma') = 0.$$

Par une position quelconque passent ∞^{3n-2}, trajectoires rectilignes rectangulaires avec une direction donnée.

La notion de *quantité vectorielle* comprend les notions de direction et de longueur, c'est-à-dire s'applique à un ensemble de vecteurs affectés chacun à un des points du système.

Si u, v, w sont les composantes, suivant les axes de coordonnées, du vecteur affecté à un point de masse m appartenant au système, la grandeur R de la quantité vectorielle est donnée par la formule

$$MR^2 = \Sigma\, m\,(u^2 + v^2 + w^2).$$

L'ensemble des vecteurs qui représentent les vitesses des différents points du système est une quantité vectorielle, dont la grandeur V est donnée, d'après la formule précédente, par

$$MV^2 = \Sigma\, m\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right],$$

et coïncide avec la valeur déjà donnée de la vitesse.

Cette quantité vectorielle prend elle-même le nom de *vitesse*.

On définira de même, sous le nom d'*accélération*, une quantité vectorielle constituée par l'ensemble des vecteurs représentant les accélérations des divers points.

La grandeur f de l'accélération sera donnée par la formule

$$Mf^2 = \Sigma\, m\left[\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2\right].$$

On appelle *composante d'une quantité vectorielle* suivant une direction donnée une quantité vectorielle ayant la direction donnée et ayant pour grandeur la projection rectangulaire sur cette direction de la quantité vectorielle, c'est-à-dire la grandeur de cette dernière multipliée par le cosinus de l'angle des deux directions.

En décomposant l'accélération de chacun des points du système suivant la tangente à la trajectoire de ce point, on obtient par cela même la décomposition de l'accélération du système en une *composante tangentielle* f_t et une *composante normale* f_n.

On reconnaît facilement que l'on a

$$f_t = \Sigma\,\frac{m\,\dfrac{dx}{dt}\,\dfrac{d^2x}{dt^2}}{MV} = \frac{dV}{dt} = \frac{d^2S}{dt^2},$$

$$f_n^2 = f^2 - f_t^2 = c^2V^2 \text{ ou } f_n = cV^2,$$

en tenant compte des relations

$$\frac{d^2x}{dt^2} = x''V^2 + x'\,\frac{dV}{dt},\quad \frac{d^2y}{dt^2} = y''V^2 + y'\,\frac{dV}{dt'};\quad \frac{d^2z}{dt^2} = z''V^2 + z'\,\frac{dV}{dt}$$

$$\Sigma\, m\,(x'^2 + y'^2 + z'^2) = M,\qquad \Sigma\, m\,(x'x'' + y'y'' + z'z'') = 0.$$

La direction de la quantité vectorielle caractérisée par l'ensemble des vecteurs x'', y'', z'' peut être assimilée à la direction de la *normale principale* d'une courbe.

La composante normale de l'accélération est dirigée suivant cette normale principale.

Il est facile de voir que, dans le cas où il n'existe pas d'autres forces que celles dues aux liaisons, la loi du mouvement peut être exprimée ainsi :

Dans toute position du système, *la direction de l'accélération est rectangulaire avec tous les déplacements virtuels relatifs à cette position.*

On peut encore dire :

Le mouvement naturel, dans le cas où il n'existe pas d'autres forces que celles dues aux liaisons, est celui qui rend minimum la grandeur de l'accélération.

Il est entendu que les données du mouvement sont la position du système, la direction et la grandeur de la vitesse.

L'une quelconque des propositions ci-dessus suffit à déterminer les éléments différentiels du second ordre des coordonnées en fonction de ces coordonnées et de leurs éléments différentiels du premier ordre, et par suite permet la mise en équation du problème du mouvement.

Supposons maintenant que la position du système soit déterminée au moyen d'un certain nombre de paramètres ou coordonnées $q_1, q_2, \ldots, q_r$.

A partir d'une position du système, faisons varier une coordonnée q en laissant les autres constantes. La direction de la trajectoire ainsi obtenue sera appelée la *direction de la coordonnée q* pour la position considérée.

Pour une position du système, la vitesse est complètement déterminée en grandeur et en direction par ses composantes suivant les directions des coordonnées, de même que la vitesse d'un point assujetti à se mouvoir sur une surface fixe est déterminée par ses composantes suivant les tangentes aux courbes de coordonnées curvilignes choisies sur la surface.

Il n'en est pas de même de l'accélération, lorsque le nombre des coordonnées q est inférieur à $3n$, n étant le nombre des points matériels.

Si l'on désigne par T l'expression de la force vive en fonction des coordonnées q et de leurs dérivées q' par rapport au temps on trouve, en appliquant les définitions données, que la composante f_q suivant la coordonnée q de l'accélération f est donnée par la formule

$$\mathrm{M} f_q = \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q'} - \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q},$$

où le terme $\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q'}$ est dû à la composante tangentielle de l'accélération et le terme $\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q}$, à sa composante normale.

La condition que l'accélération doit être rectangulaire avec tous les déplacements virtuels du système s'écrira

$$\Sigma f_q\, \delta q = 0,$$

où les δq représentent un déplacement virtuel quelconque.

Si les δq sont arbitraires, la condition s'écrira

$$f_q = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q'} - \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q} = 0 \ (r \text{ équations}).$$

Si les δq sont soumis à des équations de condition de la forme

$$\Sigma a\delta q = 0, \ \Sigma b\delta q = 0 \ldots\ldots,$$

on devra avoir

$$f_q = \lambda a + \lambda' b + \ldots\ldots$$

ou

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q'} - \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q} = \lambda a + \lambda' b + \ldots\ldots (r \text{ équations}).$$

La terminologie de Hertz s'applique non moins heureusement au cas où le système est soumis à des forces.

Ces forces déterminent une quantité vectorielle qui représentera, par définition, la *force* appliquée au système matériel.

En désignant par J la quantité vectorielle à laquelle a été donné le nom d'accélération, l'équation générale de la dynamique exprime que *la quantité vectorielle* MJ — F *est rectangulaire avec tous les déplacements virtuels*, le signe — indiquant une opération sur les quantités vectorielles, dont la signification est évidente.

Cette quantité vectorielle peut être appelée la *contrainte* (*der Zwang* de Gauss), et l'on voit que le mouvement est déterminé par la condition que *la grandeur de la contrainte soit minimum*, les mouvements comparés présentant, pour la position considérée, la même vitesse en grandeur et en direction.

On voit que les propositions générales de la mécanique des systèmes à liaisons prennent, moyennant la terminologie de Hertz, une forme particulièrement simple.

Il est juste d'observer qu'une terminologie analogue, peut-être un peu moins heureuse, avait déjà été exposée par Julius Kœnig (1).

DEUXIÈME PARTIE

MÉCANIQUE DES SYSTÈMES MATÉRIELS

Dans cette partie de son ouvrage, Hertz s'est proposé d'édifier la Mécanique rationnelle, moyennant son hypothèse et sa terminologie, suivant une ordonnance parfaitement logique.

En fait il ne s'agit pas d'autre chose que de supprimer la force en tant que notion primordiale.

Les notions d'espace, de temps et de masse étant supposées acquises, les liaisons entre les masses étant supposées indépendantes du temps et soumises aux restrictions déjà indiquées, Hertz appelle *libre* un système matériel dont les liaisons sont *internes*, c'est-à-dire n'intéressent que les *positions relatives* des points du système, ou, plus nettement, permettent tout déplacement sans déformation du système.

Hertz pose à priori, comme loi fondamentale de la Mécanique, la loi du mouvement des systèmes libres, savoir :

Tout système libre décrit une trajectoire de moindre courbure avec une vitesse constante.

Par hypothèse, tout système non libre fait partie d'un système libre, et son mouvement peut par conséquent, au moins théoriquement, être déterminé au moyen de la loi fondamentale.

Telle est l'économie générale de l'édifice logique construit par Hertz.

Sa terminologie lui a permis d'exprimer sous forme de loi unique les propriétés du mouvement des systèmes libres.

---

(1) JULIUS KŒNIG, *Interpretation der fundamental Gleichungen der Dynamik. Math. Annalen*, 1888, t. XXXI.