Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 4 (1902)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LES IDÉES DE HERTZ SUR LA MÉCANIQUE

Autor: Combebiac, G.

Kapitel: INTRODUCTION

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-5588

INTRODUCTION

L'*Introduction* a été l'objet d'une étude de M. Poincaré [1], où l'on trouvera, en même temps qu'un exposé des idées de Hertz, une discussion approfondie des principes de la Mécanique, mettant nettement en évidence les difficultés logiques que présente la coordination de ces principes.

Renvoyant à cette étude, nous nous bornerons à signaler brièvement, sans les discuter, les objections faites par Hertz aux deux systèmes proposés jusqu'ici, savoir le *système classique* et le *système énergétique ;* nous exposerons ensuite la conception de Hertz lui-même.

Système classique. — Les reproches qu'adresse Hertz à ce système visent surtout la notion de force.

Tout d'abord un examen un peu attentif de l'exposé habituel des principes de la Mécanique montre que la manière dont cette notion y est établie est loin d'être satisfaisante.

En outre l'introduction de la force dans certaines questions présente quelque chose de factice et donne l'impression de rouages inutiles compliquant inutilement les concepts intuitifs :

Que vient faire notamment la notion de force en Mécanique céleste, où l'observation ne s'applique qu'à des mouvements, tant pour en établir d'abord les lois que pour en vérifier ensuite les déductions dues à l'analyse ?

Un morceau de fer repose sur une table à peu près horizontale, fait qui nous apparaît comme extrêmement simple.

Or, pour se rendre compte, suivant les lois de la Mécanique, de la nécessité de ce repos, on doit faire l'analyse de toutes les forces auxquelles ce morceau de fer peut être soumis, pesanteur, réaction élastique de la table, frottement, forces moléculaires, magnétiques, électriques, etc., afin de constater que, tout compte fait, ces forces s'entre-détruisent.

---

[1] H. Poincaré. *Revue générale des Sciences*, 1897, p. 734.

C'est beaucoup de raisonnement pour expliquer la permanence d'un état en l'absence de toute cause perceptible de perturbation.

Un troisième reproche fait par Hertz à la notion de force vise son ampleur.

Loin d'épuiser la notion de force, telle que nous la trouvons dans la mécanique rationnelle, la nature ne nous présente que des forces soumises à de nombreuses restrictions, telles que d'être décomposables en actions réciproques entre les particules de matière, d'être indépendantes de la valeur absolue du temps et du lieu absolu de l'espace.

D'autres restrictions paraissent encore devoir être admises, sur le choix desquelles on n'est pas absolument fixé.

C'est ainsi qu'on peut se demander si les forces élémentaires consistent uniquement en attractions et répulsions suivant les lignes de liaison entre les masses agissantes, si leur grandeur ne dépend que de la distance de ces masses ou s'il y a lieu de faire intervenir les vitesses absolues ou relatives, ou encore les accélérations et les dérivés d'ordre supérieure de la vitesse.

Enfin les principes de la Mécanique n'expliquent pas la loi de la conservation de l'énergie, que sa généralité semblerait devoir faire reporter de la Physique à la Mécanique.

Il résulte de ces considérations que la Mécanique est trop vaste : elle comprend plus que la nature.

Système énergétique. — Ce système de mécanique s'obtient par la substitution, parmi les notions primordiales, de l'*énergie* à la *force*.

On se trouve de prime abord en présence d'une difficulté, l'énergie se présentant sous deux formes : l'une, cinétique, qui trouve sa définition dans son expression analytique ; l'autre, potentielle, qui nécessite une définition expérimentale bien difficile, semble-t-il, à établir convenablement.

Cet obstacle supposé franchi, il est nécessaire de poser une loi reliant les quatre notions fondamentales : espace, temps, masse et énergie.

Le choix de cette loi parmi les théorèmes généraux de la Mécanique est, dans une certaine mesure, arbitraire. Hertz choisit le principe d'Hamilton, qui exprime que le mouvement réel d'un système, dont on se donne les positions à deux instants t_0 et t_1, est celui qui rend minimum la valeur de l'intégrale

$$\int_{t_0}^{t_1} (\mathrm{T} - \mathrm{U})\, dt$$

où T représente la partie cinétique de l'énergie et U la partie potentielle.

Dans cette conception de la Mécanique, la notion de force serait introduite analytiquement et résulterait d'une simple définition de mot comme, dans le système classique, la notion de force vive.

Ce système présente l'avantage d'éviter, dans un grand nombre de questions, l'emploi d'hypothèses physiques, qui n'ont pas d'autre objet que de permettre l'application des principes de la mécanique.

L'ensemble des faits qu'il embrasse est plus restreint que celui du système classique, puisqu'il peut être déduit de ce dernier moyennant certaines hypothèses.

En fait, il est trop restreint, et cette défectuosité suffit à le faire rejeter.

Le principe d'Hamilton n'est en effet applicable qu'aux systèmes dont les liaisons s'expriment par des équations à termes finis entre les paramètres.

Or il existe des liaisons s'exprimant au moyen d'équations différentielles non intégrables. Il suffit de citer le cas des mouvements de roulement et de pivotement, cas qui a été l'objet des travaux de certains géomètres (1).

Considérons par exemple le mouvement d'une sphère roulant sans glissement sur un plan horizontal.

A chaque instant, les vitesses sont déterminées par la connaissance de l'axe instantané de rotation autour du point de contact, soit de trois quantités, au lieu de cinq, qui interviendraient, si la sphère pouvait glisser sur le plan.

La sphère, *partant d'une position donnée*, ne peut donc, sans

---

(1) Appell, Hadamard. *Mouvements de roulement et de pivotement en dynamique*, Carré et Naud, Paris.

l'intervention de forces extérieures, atteindre que ∞^3 positions.

Mais, les équations de condition n'étant pas intégrables, le nombre des positions différentes dont elle est susceptible cinématiquement doit continuer à être représenté par ∞^5.

Pour deux quelconques de ces ∞^5 positions, le principe d'Hamilton déterminerait évidemment une trajectoire, de sorte qu'en l'appliquant sans précaution, on trouve que, en partant d'une position, la sphère pourrait, sans l'intervention de forces extérieures, atteindre ∞^5 positions, conclusion contraire à la réalité.

Ajoutons que, même dans le cas où les deux positions choisies font partie d'une trajectoire dynamiquement possible (sans l'intervention de forces extérieures), le principe d'Hamilton donne généralement un résultat faux.

Citons, comme second exemple de système matériel dont les paramètres sont soumis à des équations différentielles non intégrables, le cas de la bicyclette.

Ajoutons que les systèmes matériels dont les liaisons peuvent être représentées par un système d'équations à termes finis, c'est-à-dire ceux dont la position est susceptible d'être déterminée par la connaissance d'un certain nombre de paramètres indépendants, sont appelés par Hertz systèmes *holonomes*.

Système hertzien. — Hertz voit la résolution des difficultés que présente la coordination des principes de la Mécanique dans une *explication* de la force.

La Mécanique considère la force indépendamment de sa cause.

Il n'en est pas de même de la Physique, où l'on considère plusieurs sortes de forces, qui se distinguent par leurs causes, forces élastiques, électriques, électrodynamiques, etc.

Ne saurait-on réduire ces causes à une seule, c'est-à-dire donner des diverses forces une *explication* commune ?

Parmi les causes de force (elles sont à la vérité en nombre fort restreint), on trouve le mouvement, c'est-à-dire l'inertie.

Considérons, avec M. Poincaré, un régulateur à boules, auquel nous ferons toutefois subir une modification dans le but de supprimer l'influence de la pesanteur.

Soit un losange articulé ABCD ; l'angle supérieur A est fixe ; l'angle inférieur C porte un anneau qui peut glisser le long d'une tige verticale AX ; à l'anneau C est suspendue une tringle T.

Les côtés inférieurs du losange CB et CD sont prolongés de leur propre longueur et portent à leurs extrémités libres des boules dont la masse domine beaucoup celle du reste de l'appareil. Tout l'appareil est animé d'un mouvement de rotation autour de la tige AX, et on voit que les centres des boules restent dans le plan horizontal du point fixe A, de sorte que l'effet de la pesanteur est complètement éliminé.

La force centrifuge tend à écarter les boules et par conséquent à rapprocher le point C du point A.

Le système est donc susceptible, en raison de son propre mouvement, d'exercer une force par l'intermédiaire de la tringle T.

Supposons que le système soit invisible pour nous. L'observateur attribuera la traction exercée sur la tringle T à une force, à une attraction exercée par le point A sur cette tringle.

L'hypothèse de Hertz peut être exprimée de la manière suivante :

Toutes les forces de la nature sont dues au mouvement de masses perceptibles ou latentes.

On a là, suivant l'expression de Hertz, une *explication dynamique* de la force.

Cette hypothèse postule évidemment l'existence de masses matérielles latentes (*verborgene*), telles que l'éther de Fresnel et de Maxwell.

Il resterait à établir, pour chaque espèce de forces, la théorie particulière qui lui convient, et il faut observer que l'élasticité elle-même n'échappe pas, dans cette manière de concevoir les choses, à la nécessité d'une explication dynamique.

Si nous admettons l'hypothèse de Hertz, nous sommes en mesure, du moins théoriquement, de déterminer les expressions des forces qui s'exercent entre les systèmes matériels, perceptibles ou latents, en vertu de leurs liaisons, et cela en nous appuyant seulement sur le principe de l'inertie, qui, comme on le verra, peut être conçu en dehors de toute notion de force.

Il résulterait donc de là que la force serait éliminée de la Mécanique en tant que notion primordiale, et serait réduite au rôle de notion auxiliaire, simplement définie par une expression analytique.

Telle est la conception de Hertz.

L'hypothèse qui en est la base suffit-elle à supprimer la difficulté rencontrée jusqu'ici dans la définition de la force ? On en jugera plus loin d'après l'exposé que nous ferons de la manière dont Hertz introduit cette définition.

PREMIÈRE PARTIE

GÉOMÉTRIE ET CINÉMATIQUE DES SYSTÈMES MATÉRIELS

Liaisons. — Hertz soumet les liaisons à la restriction de pouvoir être représentées par des systèmes d'équations linéaires aux différentielles totales de la forme

$$A_1\,\delta q_1 + A_2\,\delta q_2 + \ldots\ldots + A_n\,\delta q_n = 0,$$

où q_1, q_2, ..., q_n sont les paramètres déterminant la position du système, et les coefficients A_1, A_2, ..., A_n, des fonctions continues de ces paramètres.

On peut dire, d'une manière équivalente, que la somme de deux déplacements infinitésimaux possibles δq et $\delta' q$ à partir d'une même position est un déplacement infinitésimal possible à partir de cette même position (possibilité de superposer les déplacements infinitésimaux compatibles avec les liaisons).

Hertz rattache la forme linéaire des équations de condition à une propriété des liaisons, qu'il désigne sous le nom de *continuité dans l'infinitésimal* et qui consiste dans le fait que *tout déplacement infinitésimal possible peut être obtenu par une trajectoire rectiligne.*

Il résulte d'abord de la continuité des liaisons, entendue au sens ordinaire de ce mot, qu'on peut opérer successivement deux déplacements infinitésimaux $\delta q\,(\delta q_1, \delta q_2, \ldots, \delta q_n)$ et $\delta' q\,(\delta' q_1, \delta' q_2, \ldots, \delta' q_n)$ supposés possibles à partir de la position $q\,(q_1, q_2, \ldots, q_n)$, car il existe, à partir de la position $q + \delta q$, un déplacement possible ne différant de $\delta' q$ que par des infiniment petits d'ordre supérieur. On peut donc, par ce trajet, faire passer le système de la position q à la position $q + \delta q + \delta' q$.