Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 3 (1901)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: NOTE SUR L'EMPLOI DU SYMBOLE 1_0 DANS LA RECHERCHE DES FORMULES TRIGONOMÉTRIQUES

Autor: Van Emelen, L.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-4651

$\alpha_1 = \frac{-a}{2(p-a)}$, $\beta_1 = \frac{b}{2(p-a)}$, $\gamma_1 = \frac{c}{2(p-a)}, \ldots$ et l'on obtient

$$x' = \frac{1}{4(p-b)(p-c)} \begin{vmatrix} x & y & z \\ a & -b & c \\ a & b & -c \end{vmatrix} = \frac{a}{2(p-b)(p-c)}(cy+bz), \ldots$$

ou, plus simplement, en remplaçant ces résultats par des quantités proportionnelles,

$$x' = (p-a)\left(\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right),$$

$$y' = (p-b)\left(\frac{z}{c}+\frac{x}{a}\right),$$

$$z' = (p-c)\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right).$$

On pourrait déduire par exemple de là l'équation générale des coniques passant par les centres des trois cercles exinscrits à ABC, et divers autres résultats faciles à obtenir et sur lesquels il nous semble inutile d'insister.

C.-A. LAISANT.

NOTE SUR L'EMPLOI DU SYMBOLE 1_θ

DANS LA RECHERCHE

DES FORMULES TRIGONOMÉTRIQUES

1. Le rôle important que joue la quantité complexe de la forme $p + qi$ a fait comprendre à ceux qui s'occupent d'enseignement que l'étude de ces quantités devait se faire par le jeune mathématicien dès le début de ses études. Aussi leur étude est déjà inscrite depuis longtemps au programme des cours de mathématiques spéciales.

On sait que l'on peut mettre une telle quantité sous la forme $r(\cos a + i \sin a)$, r étant son module, a son argument. On connaît également la facilité avec laquelle on est conduit à établir un grand nombre de formules de la théorie des fonctions circulaires en considérant la quantité complexe mise sous cette forme trigonométrique.

J'ai remarqué, — et il est bien facile de faire cette remarque — que la quantité complexe pouvait se mettre sous une forme trigonométrique renfermant, au lieu de i, un autre symbole, dont celui-ci n'est qu'un cas particulier. Ce symbole (¹) est 1_θ, déjà considéré par Houël dans ses *éléments de la théorie des quantités complexes* et avant lui par d'autres mathématiciens, et que je définis par la formule :

$$1_\theta = \cos\theta + i\sin\theta$$

D'après cela, pourvu que $\sin\theta$ soit différent de zéro,

$$i = \frac{1_\theta - \cos\theta}{\sin\theta}$$

La quantité $A = p + q\,i$, qui peut se mettre sous la forme $r(\cos a + i\sin a)$, peut ainsi se représenter par

$$\text{(1)} \qquad A = m + n\,1_\theta = r\,\frac{\sin(\theta - a) + 1_\theta \sin a}{\sin\theta},$$

où l'on a

$$m = p - q\,\frac{\cos\theta}{\sin\theta},\quad n = q\cdot\frac{1}{\sin\theta}\cdot$$

On peut se proposer d'étudier les quantités complexes sous la forme $m + n\,1_\theta$. Cette étude ne diffère au fond aucunement de l'étude des quantités $p + q\,i$; elle présente néanmoins un certain intérêt en ce que, dans la recherche des formules trigonométriques, elle conduit à des résultats plus généraux que ceux auxquels on arrive par la considération des quantités de la forme $p+qi$.

On conçoit dès lors que ceux qui enseignent les éléments de la théorie des fonctions circulaires aux jeunes mathématiciens peuvent avec profit leur exposer cette étude et leur montrer com-

(¹) Bellavitis emploie le symbole ε^θ pour représenter l'expression $\cos\theta + i\sin\theta$; et représente la quantité e^i par ε.

M. Laisant emploie les mêmes notations dans son ouvrage : *Théorie et Applications des Equipollences.*

ment ils peuvent s'en servir dans la recherche des propriétés de ces fonctions.

L'objet de la présente note consiste dans un exposé très succinct des règles fondamentales du calcul des quantités $m + n\, \mathrm{I}_\theta$ et dans l'application de ces règles à la recherche des formules trigonométriques.

Je commencerai par établir le principe de l'égalité de deux quantités complexes écrites sous cette forme.

2. *Principe de l'égalité de deux quantités complexes de la forme* $m + n\, \mathrm{I}_\theta$. — Considérons la relation

$$(\omega_1)\quad m + n\, \mathrm{I}_\theta = m' + n' \mathrm{I}_\theta\,.$$

En y remplaçant I_θ par sa valeur, il vient

$$m + n(\cos\theta + i\sin\theta) = m' + n'(\cos\theta + i\sin\theta)$$

et par suite, si $\sin\theta \neq o$,

$$(\omega_2)\qquad m = m', \qquad n = n'.$$

L'égalité (ω_1) est donc équivalente au système (ω_2) et réciproquement.

3. *Opérations fondamentales sur ces quantités.* — Les règles du calcul des quantités de la forme $r(\cos a + i\sin a)$ étant connues, on peut, en se basant sur la relation (1), établir sans peine les règles du calcul de ces mêmes quantités mises sous la forme $r\dfrac{\sin(\theta - a) + \mathrm{I}_\theta \sin a}{\sin\theta}$. Je me bornerai à faire remarquer que l'on a

$$r_1 \frac{\sin(\theta - a_1) + \mathrm{I}_\theta \sin a_1}{\sin\theta} \cdot r_2 \frac{\sin(\theta - a_2) + \mathrm{I}_\theta \sin a_2}{\sin\theta}$$

$$= r_1 r_2 \frac{\sin(\theta - \overline{a_1 + a_2}) + \mathrm{I}_\theta \sin(a_1 + a_2)}{\sin\theta}$$

et que, en vertu de la formule de Moivre, savoir

$$\text{(I)}\qquad (\cos a + i\sin a)^m = \cos ma + i\sin ma,$$

on aura aussi, pour m entier,

$$\text{(II)}\qquad \left[\frac{\sin(\theta - a) + \mathrm{I}_\theta \sin a}{\sin\theta}\right]^m = \frac{\sin(\theta - ma) + \mathrm{I}_\theta \sin ma}{\sin\theta}.$$

4. *Expressions générales des puissances entières de* 1_θ, $1 + 1_\theta$, $1 - 1_\theta$. — On sait que les arguments respectifs des quantités 1_θ, $1 + 1_\theta$ et $1 + 1_\theta$ sont θ, $\frac{\theta}{2}$ et $\frac{1}{2}(\theta - \pi)$ et que 1, $2\cos\frac{\theta}{2}$ et $2\sin\frac{\theta}{2}$ sont leurs modules respectifs. L'application de la formule (II) donne donc

$$(\text{III}) \qquad 1_\theta^m = \frac{-\sin(m-1)\theta + 1_\theta \sin m\theta}{\sin\theta},$$

$$(\text{IV}) \qquad (1 + 1_\theta)^m = 2^m \cos^m \frac{\theta}{2}\, \frac{-\sin(m-2)\frac{\theta}{2} + 1_\theta \sin m\frac{\theta}{2}}{\sin\theta}$$

$$(\text{V}) \quad (1 - 1_\theta)^m = 2^m \sin^m \frac{\theta}{2}\, \frac{-\sin\left[(m-2)\frac{\theta}{2} - m\frac{\pi}{2}\right] + 1_\theta \sin\frac{m}{2}(\theta - \pi)}{\sin\theta}$$

5. *Conséquence des formules précédentes.* — La méthode qui fait l'objet de cette note consiste à partir d'une relation $A = o$, à mettre A sous la forme (1) et à appliquer le principe du n° 2. Je me propose d'en donner quelques exemples.

6. La formule du binôme de Newton permet de transformer la formule (II) comme suit, pourvu que m soit entier et positif.

$$\sum_{p=0}^{p=m} \frac{m(m-1)\ldots(m-p+1)}{1.2\ldots p} 1^p \sin^p a \sin^{m-p}(\theta - a) = \sin^{m-1}\theta \\ [\sin(\theta - ma) + 1_\theta \sin ma].$$

D'autre part, la formule (III) donne

$$1^p = -\frac{\sin(p-1)\theta}{\sin\theta} + 1_\theta \frac{\sin p\theta}{\sin\theta}.$$

Substituant cette valeur dans la relation précédente et appliquant le principe du n° 2, il vient

$$\sin^m(\theta - a) - \sum_{p=2}^{p=m} \frac{m(m-1)\ldots(m-p+1)}{1.2\ldots p} \frac{\sin(p-1)\theta}{\sin\theta} \sin^p a \\ \sin^{m-p}(\theta - a) = \sin^{m-1}\theta \sin(\theta - ma),$$

$$\sum_{p=1}^{p=m} \frac{m(m-1)\ldots(m-p+1)}{1.2\ldots p} \frac{\sin p\theta}{\sin\theta} \sin^p a \sin^{m-p}(\theta - a) \\ = \sin^{m-1}\theta \sin ma.$$

Ces formules donnent lieu à des cas particuliers remarquables ; citons le cas où $\theta = m\,a$:

$$\sum_{p=2}^{p=m} \frac{m(m-1)\ldots(m-p+1}{1.2\ldots p} \sin(p-1)\,ma \sin^p a \sin^{m-p}(m-1)\,a$$
$$= \sin ma \sin^m (m-1)\,a.$$

$$\sum_{p=1}^{p=m} \frac{m(m-1)\ldots(m-p+1)}{1.2\ldots p} \sin p\,ma \sin^p a \sin^{m-p}(m-1)\,a$$
$$= \sin^{m+1} a.$$

7. On a, par la formule du binôme, dans le cas où m est entier et positif,

$$\sum_{p=0}^{p=m} \frac{m(m-1)\ldots(m-p+1)}{1.2\ldots p} 1_\theta^p = (1+1_\theta)^m.$$

Remplaçant dans cette relation 1_θ^p et $(1+1_\theta)^m$ par leurs expressions (III) et (IV) et faisant usage du principe du n° 2, on obtient les deux équations

$$-\sin\theta + \sum_{p=2}^{p=m} \frac{m(m-1)\ldots(m-p+1}{1.2\ldots p} \sin(p-1)\,\theta$$
$$= 2^m \cos^m \frac{\theta}{2} \sin(m-2)\frac{\theta}{2},$$

$$\sum_{p=1}^{p=m} \frac{m(m-1)\ldots(m-p+1)}{1.2\ldots p} \sin p\theta = 2^m \cos^m \frac{\theta}{2} \sin m\frac{\theta}{2},$$

dont la seconde est bien connue.

8. Considérons encore l'identité

$$(1+1_\theta - 2.1_\theta)^m = (1-1_\theta)^m$$

Elle peut s'écrire, dans l'hypothèse de m entier et positif,

$$\sum_{p=0}^{p=m} (-1)^p \frac{m(m-1)\ldots(m-p+1)}{1,2\ldots p} 2^p (1+1_\theta)^{m-p} 1_\theta^p = (1-1_\theta)^m.$$

On sait que $(1 + 1_\theta)^{m-p}$ et 1_θ^p ont respectivement pour modules $2^{m-p} \cos^{m-p} \frac{\theta}{2}$, 1 et pour arguments $(m - p)\frac{\theta}{2}$ et $p\theta$. L'expression générale en fonction linéaire de 1_θ du produit $(1 + 1_\theta)^{m-p}\, 1_\theta^p$ est

$$\frac{2^{m-p} \cos^{m-p} \frac{\theta}{2}}{\sin\theta} \left[-\sin(m+p-2)\frac{\theta}{2} + 1_\theta \sin(m+p)\frac{\theta}{2} \right].$$

La relation précédente peut donc s'écrire

$$2^m \sum_{p=0}^{p=m} (-1)^p \frac{m(m-1)\ldots(m-p+1)}{1,2\ldots p} \frac{\cos^{m-p}\frac{\theta}{2}}{\sin\theta} \left[\sin(m+p-2)\frac{\theta}{2} - 1_\theta \sin(m+p)\frac{\theta}{2} \right] = -(1 - 1_\theta)^m = \frac{2^m \sin^m \frac{\theta}{2}}{\sin\theta} \left[\sin\left\{ (m-2)\frac{\theta}{2} - m\frac{\pi}{2} \right\} - 1_\theta \sin\frac{m}{2}(\theta - \pi) \right].$$

Appliquant à celle-ci le principe du n° 2, il vient

$$\sum_{p=0}^{p=m} (-1)^p \frac{m(m-1)\ldots(m-p+1)}{1.2\ldots p} \cos^{m-p}\frac{\theta}{2} \sin(m+p-2)\frac{\theta}{2} = \sin^m\frac{\theta}{2} \sin\left[(m-2)\frac{\theta}{2} - m\frac{\pi}{2} \right];$$

$$\sum_{p=0}^{p=m} (-1)^p \frac{m(m-1)\ldots(m-p+1)}{1.2\ldots p} \cos^{m-p}\frac{\theta}{2} \sin(m+p)\frac{\theta}{2} \ldots = \sin^m\frac{\theta}{2} \sin\frac{m}{2}(\theta - \pi).$$

L. Van Emelen (Louvain).