Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 3 (1901)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LA THÉORIE DES DÉTERMINANTS
Autor: Lelieuvre, M.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-4649

SUR LA THÉORIE DES DÉTERMINANTS

Je me propose d'indiquer ici un exposé de la théorie élémentaire des déterminants, plus rapide que la méthode habituellement suivie dans les classes de Mathématiques spéciales.

DÉFINITION. — On appelle *déterminant* de n^2 quantités un tableau carré formé par ces quantités rangées sur n lignes et n colonnes; n est l'*ordre* du déterminant que, pour abréger, je désignerai par :

$$\Delta = | \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \ldots \lambda_n | \quad (\lambda = a, b, c, \ldots l),$$

la première ligne étant formée avec la lettre a affectée successivement des n indices, la deuxième avec la lettre b, etc... Le déterminant représente, par définition, une certaine fonction de ses n^2 *éléments* que je vais définir *de proche en proche* pour les valeurs successives de n; pour cela, j'emploierai les déterminants d'ordre $n - 1$ déduits de Δ en y supprimant la première ligne (a), et successivement chaque colonne; je désignerai généralement par α_i le déterminant obtenu en supprimant la ligne (a) et la colonne de rang i, qui se croisent sur a_i, et qu'on appelle déterminant *mineur* de Δ, relatif à a_i. 1° Pour $n = 1$, je poserai : $\Delta = a_1$; 2° pour passer de l'ordre $n - 1$ à l'ordre n, j'appliquerai la formule générale :

$$(1) \qquad \Delta = a_1\alpha_1 - a_2\alpha_2 + a_3\alpha_3 \ldots + (-1)^{p+1} a_p\alpha_p + \ldots + (-1)^{n+1} a_n\alpha_n.$$

CONSÉQUENCE. — Il est évident, d'après cela, que Δ sera une somme algébrique de $n!$ produits de chacun n éléments, chaque produit renfermant un élément et un seul de chaque ligne et de chaque colonne : donc Δ *est une fonction linéaire et homogène des éléments d'une même ligne ou d'une même colonne.*

Théorème fondamental. — *Si l'on désigne par η_p le mineur de Δ relatif à un élément quelconque h_p de la ligne de rang q, et qu'on obtient en supprimant la $p^{ième}$ ligne et la $q^{ième}$ colonne, le coefficient de h_p dans le développement* (1) *de Δ est :* $H_p = (-1)^{p+q}\eta_p$.

Il suffit de montrer que si le théorème est admis pour l'ordre $(n-1)$, il est vrai pour n : admettons-le donc pour les déterminants mineurs α_i; remarquons qu'il est vrai par définition pour les éléments de la première ligne de Δ, et cherchons le coefficient de h_p appartenant à toute autre ligne : appelons généralement δ_i le mineur relatif à h_p dans α_i, et remarquons que h_p ne figure pas dans α_p, qu'il appartient à la $(p-1)^{ième}$ colonne de α_i, si i est $< p$, et à la $p^{ième}$ si i est $> p$; le coefficient cherché, tiré de (1), sera donc, d'après le théorème admis pour les α_i :

$$H_p = (-1)^{p+q}[a_1\delta_1 - a_2\delta_2 + a_3\delta_3 \ldots + (-1)^p a_{p-1}\delta_{p-1} + (-1)^{p+1} a_{p+1}\delta_{p+1} + \ldots + (-1)^n a_n \delta_n].$$

de sorte que les signes mis en évidence dans le crochet sont alternés : donc ce crochet n'est autre chose que η_p, par définition même.

Conséquence. — On peut développer Δ par rapport à toute ligne ou à toute colonne aussi bien que par rapport à la première ligne; la règle pratique est évidente et s'exprime par la formule générale :

$$\Delta = h_1 H_1 + h_2 H_2 \ldots + h_p H_p + \ldots + h_n H_n. \tag{2}$$

où H_p a la valeur ci-dessus.

Propriétés fondamentales du déterminant. — 1° Quand on multiplie par un même facteur A les éléments d'une ligne ou d'une colonne, Δ est multiplié par A.

2° Si l'on a, quel que soit p : $h_p = h'_p + h''_p$, on aura : $\Delta = \Delta' + \Delta''$, en désignant par Δ' le déterminant déduit de Δ par la substitution de la ligne h' à la ligne h, par Δ'' celui qui résulte de la substitution de h'' à h.

Ces deux propriétés sont évidentes, d'après la formule (2).

3° Le déterminant Δ ne change pas de valeur par l'échange des lignes et des colonnes de même rang : si cela est admis pour l'ordre $n-1$, le théorème en résulte aussitôt pour l'ordre n, d'après (2), car le développement du déterminant donné par rapport à la $p^{ième}$ ligne et du transformé par rapport à la $p^{ième}$ colonne, seront identiques. Toute propriété relative aux lignes s'étend donc aux colonnes.

4° L'échange de deux lignes de Δ entre elles, le multiplie par -1 : en effet, cela est prouvé par la formule (2), pour l'échange de deux lignes consécutives h et k, qui ne modifie pas les coefficients H, et altère d'une unité le rang de la ligne h ; on peut maintenant permuter deux lignes qui en comprennent m entre elles, par un nombre impair $2m+1$ d'échanges successifs de deux lignes consécutives.

Applications. — 1° Un déterminant qui a deux lignes identiques est nul : application au déterminant de Vandermonde.

2° Transformations diverses d'un déterminant par combinaisons linéaires des lignes ou des colonnes résultant des deux premières propriétés du paragraphe précédent.

3° Application à la multiplication de deux déterminants ; soit, par exemple :

$$\Delta = \mid \lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + \lambda_3\alpha_3 \quad \lambda_1\beta_2 + \lambda_2\beta_2 + \lambda_3\beta_3 \quad \lambda_1\gamma_1 + \lambda_2\gamma_2 - \lambda_3\gamma_3 \mid \ (\lambda = a, b, c)$$

on le décompose immédiatement en six déterminants contenant chacun en facteur, par exemple :

$$\Delta' = \mid \lambda_1\lambda_2\lambda_3 \mid \ (\lambda = a, b, c),$$

d'où :

$$\Delta = \Delta' F(\alpha, \beta, \gamma)$$

en désignant par F (α, β, γ) une expression ne renfermant plus les éléments de Δ', et dont on aura par suite la valeur en faisant par exemple : $a_1 = b_2 = c_3 = 1$ et tous les autres éléments de Δ' égaux à 0 ; d'où aussitôt : F $(\alpha, \beta, \gamma) = \Delta''$ en posant $\Delta'' = [\mu_1\, \mu_2\, \mu_3]$ $(\mu = \alpha, \beta, \gamma)$; donc : $\Delta = \Delta'\Delta''$.

On déduit aussitôt de cette règle les propriétés connues de l'*adjoint* D de Δ et celles de l'adjoint de cet adjoint.

Complément. — La définition (1) adoptée pour Δ ramène facilement à la définition ordinaire : $\Delta = \Sigma (-1)^{m} a_p\, b_q \dots l_s$, les éléments étant rangés dans chaque terme de Δ suivant l'ordre des lignes, et m étant de même parité que le nombre des *inversions* de la permutation d'indices $p, q \ldots s$: il suffit, en effet, d'admettre cette règle de formation du multiplicateur $(-1)^m$ pour l'ordre $n-1$, et de l'appliquer dans (1) aux α_i qui sont de cet ordre, pour l'établir aussitôt relativement à l'ordre n.

M. Lelieuvre (Caen).

TRANSFORMATION
DES COORDONNÉES BARYCENTRIQUES

Plusieurs correspondants m'ont manifesté le désir de connaître des formules simples permettant de passer d'un triangle de référence à un autre (ou d'un tétraèdre à un autre) en coordonnées homogènes trilinéaires ou tétraédriques. La question, en ce qui concerne les coordonnées barycentriques, est d'une telle simplicité que je la crois classique ; mais par cela même qu'elle a été posée, c'est qu'il peut y avoir un intérêt à faire connaître une réponse. C'est cette seule considération qui m'engage à publier la présente Note, où j'emploie les vecteurs pour l'établissement des formules dont il s'agit. Il est facile de voir qu'on y parviendrait aussi, mais moins rapidement, par l'emploi pur et simple des coordonnées cartésiennes.

Je me borne au cas des coordonnées trilinéaires, l'extension à l'espace (coordonnées tétraédriques) étant toute naturelle.

Soient : ABC un triangle de référence ; x, y, z les coordonnées barycentriques d'un point M par rapport à ABC ; A_1 A_2 A_3 un second triangle donné. Il s'agit de trouver les coordonnées x', y', z' de M par rapport à ce second triangle de référence.

Appelons α_1, β_1, γ_1 les coordonnées de A_1 ; α_2, β_2, γ_2 celles de A_2 ; α_3, β_3, γ_3 celles de A_3 par rapport à ABC ; et supposons qu'on ait :
$x + y + z = \alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 = \alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 = \alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3 = 1,$