BIBLIOGRAPHIE

ANDOYER (H.). — **Leçons sur la théorie des formes et la Géométrie analytique supérieure.** — Tome I^{er}, 1 vol. grand in-8^o de 508 pages; prix : fr. 15. Gauthier-Villars, Paris, 1900.

L'ouvrage sur la théorie des formes que publie M. Andoyer est d'un caractère essentiellement didactique. Si j'emploie cet adjectif c'est que l'auteur l'emploie lui-même dans sa préface et qu'en parcourant l'œuvre, je me suis rendu compte qu'il était justifié autant qu'il pouvait l'être.

D'après M. Andoyer l'ouvrage est destiné aux étudiants des Facultés des sciences, mais il m'est impossible de me convaincre que son but ne soit pas plus élevé.

La théorie des formes est, en effet, à peine enseignée dans les Facultés si ce n'est pour les candidats à l'agrégation et, à ce point de vue, elle l'est d'une façon assez sommaire.

D'un autre côté, les savants auxquels la théorie des formes doit son écla actuel n'ont guère publié, au point de vue didactique, que des fragments de la théorie générale lesquels, il est vrai, gagnaient en profondeur ce qu'ils perdaient en étendue, mais, précisément à cause de cela, ne donnaient pas une vue d'ensemble d'une des plus belles branches des mathématiques modernes. Or c'est un ouvrage d'ensemble que nous présente M. Andoyer.

Le premier volume est relatif aux formes binaires et ternaires, le second traitera des formes quaternaires. Par la première partie de l'œuvre on peut déjà juger de sa grande uniformité.

Nombreux sont les passages de la théorie des formes ternaires qui semblent absolument intuitifs à qui a étudié auparavant les chapitres consacrés aux formes binaires car, au nombre des éléments près, ce sont les mêmes raisonnements, les mêmes notations.

Mais d'abord avant d'analyser l'œuvre en détail parlons un peu de cette théorie des formes au point de vue philosophique. Pourrait-on expliquer ce qu'elle est à l'étudiant qui ne la connaît pas encore et lui donner un avant-goût de la merveilleuse harmonie qu'il y pourra trouver. C'est en somme fort possible.

L'impossibilité de la résolution générale des équations algébriques fut un fait établi pour la première fois, mais d'une façon indiscutable, par Abel.

De ce fait l'étude de ces équations qui semblait devoir rester à jamais inféconde quant à la recherche directe des racines, prit son essor dans un sens différent.

On connaissait déjà les relations, considérées aujourd'hui comme élémentaires, qui existent entre les racines et les coefficients. On s'aperçut aussi qu'il existait des fonctions symétriques des racines exprimables au moyen des coefficients, d'où des relations d'une importance capitale qui devaient immédiatement servir de base aux différentes théories de l'*élimination*. Et d'une façon tout à fait générale on remarqua qu'il existait des fonctions des coefficients qu'une substitution linéaire effectuée dans l'équation primitive laissait inaltérées. A chaque équation ou plutôt à chaque *forme binaire* qui, égalée à zéro, donnait une équation algébrique à une seule variable correspondait un nombre déterminé d'*invariants* et la *théorie des formes* devint à elle seule une algèbre nouvelle dans laquelle ces formes étaient étudiées d'après leurs invariants.

Mais ce n'était pas là tout. Exprimer algébriquement qu'une forme avait un invariant, c'était exprimer géométriquement que la variété représentée par cette forme avait une propriété projective. Ces propriétés projectives, si peu aisées à mettre en évidence par les anciennes méthodes de Descartes, correspondaient ici à des conceptions algébriques pures, et une nouvelle géométrie analytique se fonda dans laquelle il n'était plus besoin ni de figures, ni de l'usage explicite de coordonnées, ni même de la notion vulgaire de l'espace qui, elle aussi, se trouvait généralisée. Cela dit, abordons l'examen de l'ouvrage de M. Andoyer.

L'ouvrage débute naturellement par l'étude des systèmes binaires et aborde rapidement les transformations linéaires effectuées sur lesdits systèmes. Ces transformations forment un *groupe*, c'est-à-dire que deux transformations consécutives effectuées sur un même système donnent un système transformé que l'on aurait pu obtenir directement par une seule transformation de même nature. De là résulte immédiatement la notion d'*invariant* mise alors en lumière d'une façon remarquable. Soit symboliquement (e) l'ensemble des éléments d'un système binaire et (e') l'ensemble des éléments d'un système transformé du premier. Les relations de transformation sont de la forme

$$e'_i = f_i\,(e, \lambda)$$

et si entre elles on élimine les (λ) on a des relations de la forme

$$e'_i = \varphi_i\,(e, e'_1, e'_2, \ldots, e'_p).$$

Faisons une nouvelle transformation pour passer des (e') à des éléments (e''). On pourra de même trouver une relation telle que

$$e''_i = \varphi_i\,(e', e''_1, e''_2, \ldots, e''_p).$$

Mais puisque les substitutions linéaires forment un groupe on aurait pu avoir directement

$$e''_i = \varphi_i\,(e, e''_1, e''_2 \ldots, e''_p),$$

d'où

$$\varphi_i\,(e', e''_1, e''_2, \ldots e''_p) = \varphi_i\,(e, e''_1, e''_2, \ldots, e''_p).$$

Ces fonctions φ qui ne changent pas de valeur quand on y remplace les (e) par les (e') sont les invariants absolus du système considéré. Elles satisfont à un système complet d'équations aux dérivées partielles.

Le chapitre II a trait aux formations invariantes générales et tout d'abord aux *polaires* dont la notion a déjà été rencontrée au cours du chapitre précédent. On y reconnaît immédiatement la généralisation de la conception géométrique bien connue. Il en est de même quant aux *jacobiens* et aux *hessiens*.

Le chapitre III revient d'une façon approfondie sur les systèmes linéaires et leurs invariants. L'un des plus importants de ces derniers est le *rapport anharmonique* relatif à quatre éléments.

Le chapitre IV traite des *résultants* et des *discriminants*. Nous sommes ici dans le problème si important de l'élimination. Le résultant est naturellement un invariant. Egalé à zéro il représente la condition nécessaire pour que deux formes aient une racine commune. Le résultant des dérivées partielles d'une forme en est le *discriminant*. Egalé à zéro il donne la condition nécessaire et suffisante pour que ladite forme ait une racine double.

L'étude de formes particulières fait l'objet des chapitres V, VI, VII et VIII. Après la forme bilinéaire viennent les formes quadratique, cubique, biquadratique et quintique et l'étude générale de la réduction aux formes *canoniques*. Il n'est guère possible d'analyser ceci en détail. Remarquons simplement l'intérêt qui s'attache à l'étude de la forme bilinéaire

$$f(x,y) = a_{11}x_1y_1 + a_{12}x_1y_2 + a_{21}x_2y_1 + a_{22}x_2y_2$$

qui égalée à zéro donne

$$-\frac{x_1}{a_{21}y_1 + a_{22}y_2} = \frac{x_2}{a_{11}y_1 + a_{12}y_2}$$

et définit la correspondance *homographique* entre les éléments (x) et (y). Il est particulièrement intéressant de supposer coïncidantes les séries X formées des (x) et Y formées des (y). On a alors des invariants intéressants, tels que $f(x, x)$ et $f(y, y)$ qui égalés à zéro définissent les éléments qui, considérés comme appartenant à X ou à Y, coïncident avec leurs correspondants.

On reconnaît immédiatement que cette analyse donne en Géométrie la théorie de l'homographie et de ses points doubles.

Si la forme f est constamment égale à celle g que l'on obtient en y permutant les (x) et les (y), on a

$$f - g = (a_{12} - a_{21})(x_1y_2 - x_2y_1) = 0.$$

Réciproquement la condition pour que $f = g$ est simplement $a_{12} - a_{21} = 0$. Alors (y) a toujours même correspondant qu'on le considère comme appartenant à X ou à Y : c'est le cas de l'*involution*.

Comme second point important des chapitres ci-dessus mentionnés il faut surtout citer ce qui est relatif à la réduction des formes quadratiques aux formes canoniques correspondantes qui sont des sommes de carrés. Au seul point de vue de la géométrie analytique ordinaire on sait que les cas sont nombreux où il faut effectuer de telles réductions.

La forme linéo-quadratique, ainsi que son nom l'indique, est du second degré par rapport aux éléments (x) et du premier par rapport aux éléments (y). A chaque élément (x) correspond donc un seul élément (y), tandis qu'à chaque élément (y) correspondent deux éléments (x).

Vient ensuite la forme doublement quadratique qui est de beaucoup la plus importante. Elle définit entre les (x) et les (y) une correspondance telle qu'à chaque élément de l'une des séries correspondent deux éléments de l'autre. Cette étude de la forme doublement quadratique est non seulement importante, mais très élégante. Tous ses invariants notamment s'expriment facilement au moyen du système fondamental formé par sept d'entre eux.

Enfin après avoir indiqué en quelques pages (chapitre IX) comment on peut étudier directement les formes à deux séries de variables, l'auteur termine son premier livre par un aperçu sur la géométrie métrique binaire.

C'est surtout là que l'on se rend compte que la géométrie ordinaire n'est qu'un cas particulier des théories précédemment développées.

Les mots *distance* et *mouvement*, par exemple, prennent un caractère analytique abstrait que l'intelligence peut juger, mais qui ne peut être transporté dans l'espace euclidien et tomber sous nos sens en reprenant la signification vulgaire qu'à la condition d'être dégénéré d'une façon particulière.

Et ce n'est pas là la conclusion philosophique la moins remarquable.

Le second livre de l'ouvrage de M. Andoyer a trait aux formes ternaires et il est plus de deux fois aussi étendu que le premier, mais à cause, je le répète, de l'uniformité de la notation et de l'exposition son étude sera simplifiée de beaucoup pour qui aura bien compris le premier. On y revoit tout d'abord les substitutions linéaires et leurs invariants, puis des considérations sur les faisceaux d'éléments qui rappellent immédiatement des théorèmes bien connus de la géométrie ordinaire à deux dimensions relatifs aux quadrilatères complets, aux transversales, etc...

L'analogie de la géométrie à deux dimensions avec la théorie des formes ternaires qui en est une généralisation, se remarquera à chaque instant dans les chapitres suivants qui seront même d'une lecture facile pour qui connaît les théories géométriques élémentaires des *développées*, des *polaires* des divers ordres d'une courbe plane, de la *jacobienne*, de la *hessienne*, de la *cayleyenne*, de la *steinérienne*. Les célèbres formules de Plücker se retrouveront également avec tout le degré de généralité possible. Les mots ne seront pas changés, leur sens seul apparaîtra comme considérablement étendu.

Tout comme dans le livre I, nous retrouvons l'homographie comme correspondant à la forme bilinéaire et l'on arrive ensuite aux formes quadratiques et aux systèmes de deux formes quadratiques. Ces parties de l'œuvre deviennent de plus en plus difficiles à analyser brièvement. Là comme ailleurs, M. Andoyer laisse nettement voir l'analogie des théories générales avec les théories particulières de la géométrie analytique ordinaire. On a par exemple, à propos des séries quadratiques des théorèmes absolument analogues à ceux de la théorie géométrique des polaires dans les coniques.

L'étude des séries cubiques et de leurs polaires offre des résultats de même nature et l'on examine ensuite rapidement les séries quartiques. Le premier volume de l'ouvrage de M. Andoyer se termine avec la géométrie métrique ternaire. On se reprend à admirer alors la portée philosophique d'une science qui au début ne semblait être que celle des propriétés projectives.

On retrouve d'abord les notions fondamentales d'espace et de distance de même qu'en géométrie binaire, puis vient l'étude du groupe des déplacements.

L'examen des propriétés des *séries circulaires* ou *cercles*, offre également un très grand intérêt.

Les éléments définis par la forme quadratique fixe $F^2{}_x$ constituant l'*absolu* de l'espace, considérons une série quadratique bitangente à l'absolu définie par l'équation

$$(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3)^2 + \alpha^2{}_4 F^2{}_x = 0.$$

On peut écrire

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_4 \sqrt{-F^2{}_x} = 0$$

le radical ayant deux signes différents d'où deux séries composées des mêmes éléments, mais différemment orientés. Ce sont les cercles en question dont le nom se trouve déjà justifié par cette simple remarque qu'en géométrie ordinaire tous les cercles, au sens élémentaire du mot, ont deux points communs avec le cercle imaginaire de l'infini.

Reprenant la définition générale du cercle, on est amené à des généralisations d'un extrême intérêt. Pour prendre un exemple des plus importants, remarquons simplement que les cercles de rayon nul qui sont tangents à une série quelconque, en définissent les *foyers*.

Le dernier chapitre de l'ouvrage de M. Andoyer examine ce que devient la géométrie métrique précédente quand la forme F^2_x dont les éléments définissent l'absolu, admet un discriminant nul.

Les lignes qui précèdent ne peuvent donner qu'une faible idée de l'œuvre. L'auteur a fait un choix plus qu'heureux dans tous les matériaux qui étaient à sa disposition et a mis une marque bien personnelle dans l'uniformité de l'exposition. Il ne reste qu'à souhaiter que beaucoup de jeunes géomètres prennent la peine de l'étudier.

Ceux-ci comprendront alors que la géométrie analytique cartésienne et l'antique géométrie rendue moderne par Chasles et ses disciples ne sont pas deux sœurs ennemies devant toujours mettre leur amour-propre à s'ignorer mutuellement, mais ayant seulement eu besoin de grandir pour se reconnaître sur le terrain de l'algèbre supérieure.

A. Buhl (Paris).

Cantor (Moritz). — **Vorlesungen über Geschichte der Mathematik**, Dritter Band, Erste Abteilung (1668-1699). Zweite Auflage. Un fascicule in-8° de 261 pages. B. G. Teubner, éditeur à Leipzig.

Le savant Moritz Cantor poursuit, avec une ardeur toute juvénile bien que septuagénaire, la publication de la seconde édition de sa remarquable *Histoire des Mathématiques*. Il nous donne aujourd'hui la première partie du troisième volume. Ce fascicule comprend la période 1668-1699.

Il y étudie d'abord les travaux de Géométrie élémentaire que produisirent à cette époque les anglais John Collins (1625-1683) et Isaac Barrow (1630-1677), l'italien Giordano Giordani (1633-1711), les français Milliet Dechales et Sébastien Le Clerc dont la *Pratique de la Géométrie* (1669) a joui pendant une trentaine d'années d'un succès mérité. Puis il passe en revue les travaux de Nicolas Mercator, de lord Brouncker qui trouva pour π l'expression d'où découle la théorie des fractions continues, de Halley de Grégory et d'Abraham de Moivre qui contribua à édifier la trigonométrie des quantités imaginaires.

L'auteur aborde ensuite la grande découverte de l'*Analyse infinitésimale* que Leibniz et Newton partagent la gloire d'avoir inventée. Il montre la part qui revient à chacun d'eux dans cette immortelle conquête. Les érudites discussions du professeur de Heidelberg peuvent d'ailleurs se résumer en ces quelques lignes de Joseph Bertrand. « Quoique la publication de Newton ait été postérieure à celle de Leibniz, il est prouvé qu'il ne lui doit rien; mais tout porte à croire qu'il ne l'a aidé en rien... Si Newton plus diligent avait formulé dix ans plus tôt sa « théorie des fluxions », le nom de Leibniz resterait un des plus grands dans l'histoire de l'esprit humain; mais tout en le comptant parmi les géomètres de premier ordre, c'est à ses idées philosophiques et à l'universalité de ses travaux que la postérité attacherait surtout sa gloire. Si Leibniz au contraire, abordant plus tôt l'étude des mathématiques, avait pu ravir à son rival l'honneur de leur commune découverte, on n'admirerait pas moins dans le livre des *Principes*, avec la majesté des résultats obtenus, l'incomparable éclat des détails ; et en perdant ses droits à l'invention de la méthode qui s'y trouve employée avec tant d'art, Newton resterait placé au rang qu'il occupe aujourd'hui parmi les géomètres : je veux dire à côté d'Archimède et au-dessus de tous les autres ». Une fois cette question de priorité ainsi tranchée, M. Cantor termine en indiquant les progrès que les Bernouilli et le marquis de L'Hopital ont apportés à cette nouvelle branche du calcul.

Jacques Boyer (Paris).

Maur. Godefroy. — **La Fonction Gamma** ; théorie, histoire, bibliographie. Un vol. in-8°, VII-94 p. ; prix : fr. 3,50 ; Gauthier-Villars, Paris, 1901.

Dans le premier chapitre (p. 1 à 6) intitulé *Historique*, l'auteur donne un aperçu de la part qu'ont prise Wallis, Stirling, Euler, Gauss, Legendre, Weierstrass, Prym et Hermite, dans le développement de la théorie de la fonction Gamma. L'importance des travaux de Wallis et de Stirling a été mise en lumière par M. J. Eggenberger [1] en 1893. Dans ce travail, qui a échappé à M. Godefroy, l'auteur montre, pour la première fois, comment l'application de la formule sommatoire de Moivre-Stirling a conduit au calcul d'une valeur approchée de $\Gamma(x+1)$. Un autre mémoire eût encore mérité d'être signalé. C'est celui dans lequel M. H. Schenkel [2] fait ressortir l'influence d'Euler. A signaler aussi le mémoire de L. Euler. *De curva hypergeometrica hac æquatione expressa* $y = 1.\ 2.\ 3 \ldots x$. *Nova comm. Academ. scient. imp. Petropol.*, t. XIII, *pro* 1768, *Petropoli*, 1769). Ainsi que le fait M. Godefroy dans son premier chapitre, les travaux de Gauss doivent être traités avant ceux de Legendre. M. Schenkel a montré que le principal mérite du grand géomètre allemand dans le développement de la fonction Gamma consiste en ce qu'il a établi la théorie sur la notion de limite d'un produit, et qu'il a fait voir que cette fonction et l'intégrale eulérienne de première espèce qui lui correspond ont une signification précise, non seulement pour des valeurs entières et positives de la variable, mais encore pour des valeurs fractionnaires ou imaginaires. Si nous insistons tout particulièrement sur la partie historique, ce dont M. Godefroy voudra bien nous excuser, c'est que cette partie nous a toujours vivement intéressé.

Bien que la méthode de Legendre ait été adoptée par la plupart des auteurs, si on l'envisage au point de vue de la simplicité des prémisses et de la déduction logique, elle doit être placée après celle de Gauss. C'est ce qui ressort clairement du travail de M. Schenkel, qui poursuit un but analogue à celui de M. Godefroy. Ils étudient tous deux la marche de la fonction Gamma et en donnent une représentation graphique.

---

(1) J. Eggenberger, *Beiträge zur Darstellung des Bernoulli'schen Theorems, der Gammafunktion und des Laplace'schen Integrals*, Bern, K.-J. Wyss, 1893.

(2) H. Schenkel, *Kritisch-historische Untersuchung ueber die Theorie der Gammafunktion und Euler'schen Integrals*, A. Gull, Uster-Zurich, 1894.

M. Godefroy insiste, à juste titre, sur l'influence des recherches de WEIERSTRASS relatives à la théorie des *facultés* (*ou factorielles*) *analytiques* (*Theorie der analytischen Facultäten*). Toutefois il y a lieu de signaler aussi le fondateur de cette théorie, CH. KRAMP (1) qui a établi les propriétés fondamentales des factorielles numériques, ainsi que nous avons eu l'occasion (2) de le montrer.

Ainsi, tout en tenant compte de l'intention de l'auteur de ne donner qu'un court aperçu historique, nous estimons, par le fait des omissions que nous venons de mentionner, que ce premier chapitre ne donne qu'une idée imparfaite du développement historique de la fonction Gamma.

Le chapitre II (p. 7 à 28) est consacré à l'*Etude générale de la fonction Gamma*. Prenant comme point de départ la définition de Gauss

$$\pi(x) = \lim_{n=\infty} n^x \frac{1.2.3.\dots.n}{x(x+1)\dots.(x+n)},$$

l'auteur en déduit, d'une manière à la fois claire et simple, la somme connue sous le nom de *constante d'Euler;* puis il établit la formule de Weierstrass et démontre que l'inverse de la fonction Gamma est développable en une série entière de rayon de convergence infini. Vient ensuite la relation fonctionnelle $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ (première propriété de la fonction Gamma d'après Legendre), examinée pour des valeurs entières positives ou négatives et pour des valeurs imaginaires; puis, la détermination du module de $\Gamma(\alpha+\beta i)$, du résidu de $\Gamma(x)$, et de la limite, pour $n = \infty$, de $\frac{1}{n^x}\frac{\Gamma(x+n)}{1.2.3\dots(n-1)}$. L'auteur applique les résultats obtenus à l'étude de la série de Stirling et à la convergence de la série hypergéométrique, applications qui le conduisent à un théorème dû à M. APPELL.

Considérant ensuite les expressions

$$eP(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{x(x+1)(x+2)} + \dots$$

et

$$\Gamma(x+n) = x(x+1)\dots(x+n-1)\Gamma(x),$$

l'auteur désigne sous le nom de *fonction de Bourguet* la somme de la série

$$e\frac{P(x)}{\Gamma(x)} = \frac{1}{\Gamma(x+1)} + \frac{1}{\Gamma(x+2)} + \frac{1}{\Gamma(x+3)} + \dots = T(x);$$

il en étudie les propriétés ainsi que celles de la fonction $P(x)$.

Les *propriétés de la fonction Gamma* font l'objet du ch. III. La méthode suivie s'écarte de celle de Legendre. L'auteur examine d'abord la *relation des compléments* $\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}$, due à Euler (3e propriété fondamentale de la fonction de Legendre); puis la formule

$$\Gamma(x)\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right) = \frac{2\sqrt{\pi}}{2^{2x}}\Gamma(2x),$$

(1) CH. KRAMP, *Analyse des réfractions astronomiques*, chap. III, Strasbourg, 1799.

(2) J.-H. GRAF, *Einleitung in die Theorie der Gammafunktion und der Euler'schen Integrale*, Wyss, Berne, 1895.

(6^e propriété fondamentale de la fonction de Legendre) que nous avons désigné (*loc. cit.*, p. 21) sous le nom de formule de l'argument double ; elle n'est d'ailleurs qu'un cas particulier de la relation générale, due à Gauss,

$$\Gamma(x)\,\Gamma\left(x+\frac{1}{m}\right)\ldots\Gamma\left(x+\frac{m-1}{m}\right)=(2\pi)^{\frac{m-1}{2}}\,m^{-mx+\frac{1}{2}}\,\Gamma(mx),$$

ainsi que le fait remarquer M. Godefroy. Le chapitre se termine par l'étude de la *formule de Mellin* et de la relation entre la fonction Gamma et la série hypergéométrique. Je me permets de signaler à ce sujet le travail de thèse, actuellement sous presse, qu'un de mes élèves, M. L. Jecklin, consacre au développement de la théorie de la série hypergéométrique jusqu'à Kummer.

Le chapitre IV (p. 39-49) traité de la *fonction de Binet*.

$$\varpi(x)=\sum_{n=0}^{n=\infty}\left[\left(x+\frac{2n+1}{2}\right)\log\left(1+\frac{1}{x+n}\right)-1\right].$$

On y trouve plusieurs formules dues à Binet et la *formule* de Gudermann

$$\log\Gamma(x)=\log\sqrt{2\pi}+\left(x-\frac{1}{2}\right)\log x-x+\varpi(x).$$

Ces deux relations jouent un rôle important dans le développement de log $\Gamma(x)$.

Le chapitre V (p. 50-65) a pour titre les *Fonctions* $\Phi(x)$ et $\Psi(x)$,

$$\Phi(x)=\frac{d\log\Gamma(x)}{dx},\qquad \Psi(x)=\frac{d^2\log\Gamma(x)}{dx^2},$$

qui possèdent les mêmes propriétés fondamentales que la fonction Gamma. L'auteur présente, entre autres, une étude très intéressante de la différence $\Phi(x+a)-\Phi(x)$; il détermine $\Phi(x)$ pour une valeur rationnelle de x, et donne, à titre d'application la courbe figurative de la fonction Gamma.

Dans la chapitre VI (p. 66 à 73) sont étudiés les *développements en séries entières* des fonctions $\log\Gamma(1+x)$, $\Gamma(1+x)$, $\frac{1}{\Gamma(1+x)}$, P et Ω de $(1+x)$ et Φ et Ψ de $(1+x)$.

Le dernier chapitre contient les applications des fonctions $\Gamma(x)$ et $\Phi(x)$ indiquées par M. Appell et la résolution des équations de Lindhagen et de Crelle.

Nous terminons en félicitant M. Godefroy d'être parvenu à présenter les notions fondamentales de la théorie de la fonction Gamma dans un espace relativement restreint et sous une forme aussi simple que claire. Tous ceux qui s'occupent de cette intéressante fonction trouveront dans ce livre des indications qui leur seront très précieuses.

J.-H. Graf (Berne).

Ern. Pascal. — **Die Determinanten**. Eine Darstellung ihrer Theorie und Anwendungen mit Rücksicht auf die neueren Forschungen. Berechtigte deutsche Ausgabe von Dr Herm. Leitzmann. 1 vol. in-8°, xvi-266 pages; prix (relié) : 10 Mk. ; B.-G. Teubner, Leipzig, 1900.

Sous le titre *Lehrbücher der mathematischen Wissenschaften*, la maison Teubner publie une collection ayant pour but de présenter, dans leur état actuel, les diverses branches des sciences mathématiques et qui, par ce fait, vient prendre place à côté de l'*Encyklopaedie der math. Wissenschaften*, dont elle formera un complément très utile. Comme on le voit, il ne s'agit pas de simples manuels à l'usage des commençants, mais d'une série de petits traités destinés à la fois aux professeurs et aux étudiants.

Ce volume fait partie de cette importante collection, et nous nous empressons de dire qu'il méritait d'en faire partie, grâce à la place que l'auteur a accordé aux travaux les plus récents. Une première édition de cet ouvrage a paru en langue italienne en 1896, à Pavie.

L'ouvrage comprend deux parties. La première (p. 1 à 35) intitulée *Grundlagen des Rechnens mit Determinanten*, contient les définitions, les propriétés fondamentales et le calcul des déterminants. Ce sont les notions élémentaires que doivent posséder tous ceux qui veulent se livrer à une étude approfondie des déterminants.

Dans la seconde partie, de beaucoup la plus développée (p. 36 à 254), l'auteur a réuni, sous le titre *Besondere Untersuchungen über Determinanten und Anwendungen*, les propriétés spéciales relatives, soit à la structure même du déterminant, soit aux applications les plus diverses. L'auteur a eu soin de se borner aux applications caractéristiques et d'éviter en particulier celles qui ne seraient que de simples interprétations géométriques.

Depuis une cinquantaine d'années l'importance de la théorie des déterminants n'a cessé de croître ; on a reconnu son utilité dans les domaines les plus divers ; aussi, de nos jours cette théorie est-elle devenue un puissant auxiliaire dans la plupart des travaux des mathématiques modernes. Ses applications dans les diverses branches ont donné lieu à une foule de propriétés très importantes ; mais beaucoup d'entre elles, relativement récentes, ne figurent pas encore dans les traités classiques ; M. Pascal en a largement tenu compte. Son ouvrage mérite donc d'être signalé à tous les mathématiciens.

Nous devons ajouter qu'à la tête de chaque paragraphe figurent des indications bibliographiques très complètes qui permettront au lecteur de recourir aux mémoires originaux.

H. F.

C. Runge. — **Praxis der Gleichungen** (*Collection Schubert*, t. XIV). Un vol. relié, p. in-8°, 196 p.; prix : Mk. 5,20 ; G.-J. Gœschen, Leipzig, 1901.

On ne saurait assez insister sur l'importance du but de ce petit volume que nous nous empressons de signaler à l'attention des professeurs d'Algèbre et de tous ceux qui sont appelés à utiliser les propriétés de la théorie des équations. Ainsi que l'indique son titre, cet ouvrage est destiné à familiariser l'étudiant dans la pratique des calculs qui interviennent dans la résolution numérique des équations. On y trouve donc les compléments indispensables — mais trop souvent négligés dans l'enseignement — aux considérations théoriques qui sont développées dans les cours d'Algèbre, et plus particulièrement dans les leçons consacrées à la théorie des équations.

L'ouvrages comprend les quatre chapitres suivants :

1. Equations linéaires à une ou à plusieurs inconnues.— 2. Equations non linéaires à une inconnue.— 3. Equations non linéaires à plusieurs inconnues. — 4. Fonctions rationnelles entières.

Dans chacun de ces chapitres l'auteur examine la résolution numérique des équations au point de vue de l'exécution rapide des calculs, en ayant recours à de nombreux exercices développés avec beaucoup de détails. Il insiste, ainsi que cela doit se faire, sur l'approximation obtenue dans les résultats. Les exemples sont, pour la plupart, empruntés aux mathématiques appliquées. Quelques-uns d'entre eux fournissent l'occasion d'initier l'étudiant à la construction de tables numériques ou à l'emploi de procédés graphiques.

A mentionner, entre autres, la détermination des racines à l'aide de la méthode découverte en 1839 par le professeur Graeffe, de Zurich. Ce procédé n'a pas encore obtenu dans l'enseignement la place qu'il mérite. A cet effet nous croyons utile de signaler à nos lecteurs le remarquable exposé qu'en donne M. Carvallo dans son opuscule intitulé *Méthode pratique pour la résolution numérique complète des équations algébriques ou transcendantes,* publié en 1896 chez Nony (Paris).

H. Fehr.
