

# SUR LE THÉORÈME DE DESCARTES

Autor(en): **Zervos, P.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **3 (1901)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **26.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-4671>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

sont supposés alternativement positifs et négatifs. En outre nous admettons encore que

$$\begin{aligned} |a_{\nu+1}| &< |a_{\nu}|, \\ |a_{\nu+1}| &< |a_{\nu+2}|. \end{aligned}$$

Il en résulte l'inégalité

$$\left| \frac{a_{\nu+1}}{a_{\nu}} \right| < \left| \frac{a_{\nu+2}}{a_{\nu+1}} \right|,$$

car

$$\left| \frac{a_{\nu+1}}{a_{\nu}} \right| < 1 \text{ et } \left| \frac{a_{\nu+2}}{a_{\nu+1}} \right| > 1$$

et on retombe, par conséquent, dans le cas précédent, c'est-à-dire que le polynôme aura un nombre de racines positives inférieur d'une unité au nombre des variations.

P. ZERVOS (Athènes).

---

## SUR LE THÉORÈME DE DESCARTES

---

Dans la démonstration suivante du théorème de Descartes nous employons le théorème de Rolle.

Laguerre (*Œuvres complètes*, 1) a aussi donné une démonstration du même théorème fondée sur le théorème de Rolle. Mais notre démonstration diffère essentiellement de la sienne. Elle montre comment, étant donné un polynôme, on trouve une limite supérieure du nombre des racines positives au moyen de la limite supérieure du nombre des racines positives de sa dérivée d'un certain ordre.

1. Si nous exprimons par  $n$  le nombre des variations d'un polynôme entier à coefficients réels, le nombre de ses racines positives est  $n - 2t$ , où  $t$  est un entier positif ou zéro.

Je dis que, si cette proposition est vraie pour tout polynôme entier ayant  $n - 1$  variations, elle l'est aussi pour tous ceux ayant  $n$  variations.

2. Nous pouvons exprimer le nombre des racines positives de tout polynôme entier, qui présente  $n$  variations, par  $n + 2\rho_1$ , où  $\rho_1$  est zéro ou un entier positif ou négatif.

En effet, si  $n$  est un nombre pair, les termes extrêmes du polynôme ont le même signe, et par conséquent le nombre des racines positives est pair. Enfin la différence de deux nombres pairs est un nombre pair. — Et si  $n$  est un nombre impair, le premier terme du polynôme a un signe différent du dernier terme; donc le nombre des racines positives est impair, la différence de deux nombres impairs étant un nombre pair.

3. Je démontrerai l'impossibilité de l'inégalité  $\rho_1 > 0$ .

Démonstration. — Soit le polynôme donné

$$f(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \dots + a_r x^{m-r} + a_{r+1} x^{m-r-1} + \dots + a_m$$

et admettons que la dernière variation se présente entre les termes  $a_r x^{m-r}$  et  $a_{r+1} x^{m-r-1}$ . Je prends les dérivées successives de  $f(x)$ . De ces dérivées, la première qui offre  $n - 1$  variations est celle de l'ordre  $m - r$ . Car la variation que présentaient dans  $f(x)$  les termes  $a_r$  et  $a_{r+1}$  est perdue dans  $f^{(m-r)}(x)$ , à cause de la disparition des coefficients  $a_{r+1}$ ,  $a_{r+2}$  et suivants.

Mais, pour  $n - 1$  variations on a supposé la proposition vraie, et par suite le nombre des racines positives du polynôme  $f^{(m-r)}(x)$  est  $n - 1 - 2k$ , où  $k$  est un entier positif ou zéro.

Donc le polynôme  $f^{(m-r-1)}(x)$ , dont la dérivée est  $f^{(m-r)}(x)$  a des racines positives au nombre de  $n - 2k$  tout au plus, d'après le théorème de Rolle.

Mais le polynôme  $f^{(m-r-1)}(x)$  présente  $n$  variations; donc le nombre de ses racines positives est  $n + 2\rho_2$  (§ 2), et il faut que

$$n + 2\rho_2 \leq n - 2k,$$

(où  $\rho_2$  est un entier ou zéro)

d'où il suit

$$-\rho_2 \geq k,$$

c'est-à-dire

$$n + 2\rho_2 = n - 2k_1 \quad \text{où} \quad 0 \leq k_1 \leq k$$

( $k_1$  étant un entier positif).

Maintenant, d'une part, je conclus, par le théorème de Rolle, que  $n - 2k_1 + 1$  est la limite supérieure du nombre des racines positives de  $f^{(m-r-2)}(x)$ . D'autre part, la remarque que le polynôme donné a  $n$  variations et par suite (§ 2)  $n + 2\rho_3$  racines positives (où  $\rho_3$  est entier ou zéro) m'interdit la supposition que le polynôme  $f^{(m-r-2)}(x)$  a  $n - 2k_1 + 1$  racines positives. En effet, dans le cas contraire, j'aurais

$$n - 2k_1 + 1 = n + 2\rho_3 \quad \text{d'où} \quad \frac{1}{2} = \rho_3 + k_1$$

ce qui est absurde, puisque  $\rho_3$  et  $k_1$  sont tous les deux entiers.

Donc

$$n + 2\rho_3 \leq n - 2k_1, \quad -\rho_3 \geq k_1,$$

d'où

$$n + 2\rho_3 = n - 2\lambda,$$

$\lambda$  étant un entier positif ou zéro.

Par la même série de raisonnements je conclus que le nombre des racines positives de  $f^{(m-r-3)}(x)$  est  $n - 2\mu$ , où  $\mu$  est un entier positif ou zéro.

De la même manière pour  $f^{(m-r-4)}(x)$ ; par suite, en continuant ainsi, nous arriverons à une semblable conclusion pour  $f(x)$ , c'est-à-dire que le nombre de ses racines positives s'exprime par  $n - 2t$ .

Pour  $n = 1$  la proposition est évidente, donc le théorème de Descartes est démontré.

P. ZERVOS (Athènes).