Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 3 (1901)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: QUELQUES REMARQUES SUR LA RECHERCHE DU NOMBRE DES RACINES POSITIVES D'UN POLYNOME

Autor: Zervos, P.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-4670

QUELQUES REMARQUES

SUR LA

RECHERCHE DU NOMBRE DES RACINES POSITIVES

D'UN POLYNOME

---

1. *Tout polynôme entier à coefficients réels perd* 2 k *variations* (k = *entier positif ou zéro*) *par la multiplication par* x + a (a > o).

2. Soit d'abord un polynome *complet*, c'est-à-dire renfermant toutes les puissances de x :

$$Ax^{\mu} + \ldots + B'x^{\nu+1} - Bx^{\nu} - B''x^{\nu-1} \ldots - C'x^{\omega+1} + Cx^{\omega} + C''x^{\omega-1}$$
$$+ \ldots \mp K'x^{\rho+1} \pm Kx^{\rho} \pm K''x^{\rho-1} \ldots \pm Hx^{\sigma}.$$

Il y a une et une seule variation entre

$$Ax^{\mu} \text{ et } - Bx^{\nu}, \ldots \text{ etc.},$$

il n'y a plus de variation entre les termes

$$K''x^{\rho-1} \text{ et } Hx^{\sigma}.$$

La multiplication par $x + a$ donne

$$Ax^{\mu+1} \begin{array}{l|}+\ldots+B' \\ +\ldots+(\;)\end{array} x^{\nu+2} \begin{array}{r|}-B \\ +aB'\end{array} x^{\nu+1} \begin{array}{r|}-B'' \\ -aB\end{array} x^{\nu} \begin{array}{r|}-\ldots-C' \\ -\ldots-(\;)\end{array} x^{\omega+2} \begin{array}{r|}+C \\ -aC'\end{array} x^{\omega+1} \begin{array}{c}+ \\ +\end{array}$$
$$\begin{array}{r|}+C'' \\ +aC\end{array} x^{\omega} \begin{array}{r|}+\ldots\mp K' \\ +\ldots\mp(\;)\end{array} x^{\rho+2} \begin{array}{r|}\pm K \\ \mp aK'\end{array} x^{\rho+1} \begin{array}{r|}\pm K'' \\ \pm aK\end{array} x^{\rho} \begin{array}{r|}\ldots\pm H \\ \ldots\pm(\;)\end{array} x^{\sigma+1} \pm aHx^{\sigma}.$$

$$Ax^{\mu+1} + \ldots + (\;)x^{\nu+2} \mp (\;)x^{\nu+1} - (B''+aB)x^{\nu} - \ldots - (\;)x^{\omega+2} \pm (\;)x^{\omega+1}$$
$$+ (C''+aC)x^{\omega} + \ldots \mp (\;)x^{\rho+2} \left\{\begin{array}{c}\pm \\ \mp\end{array}\right. (\;)x^{\rho+1} \pm (K''+aK)x^{\rho} \ldots \pm aHx^{\sigma}$$

Du premier terme du produit jusqu'à celui en x^{ν} nous n'aurons qu'une variation, car le premier terme et tous les suivants jusqu'à celui en $x^{\nu+2}$ sont positifs et le terme en x^{ν} est négatif; donc, que le coefficient de $x^{\nu+1}$ soit positif ou négatif, nous n'avons qu'une variation jusqu'au terme en x^{ν}.

De même, du terme en x^{ν} jusqu'à celui en x^{ω}, il n'y a qu'une variation; en effet, du terme en x^{ν} jusqu'à celui en $x^{\omega+2}$, il y a constamment des termes négatifs et, le coefficient de x^{ω} étant positif, celui de $x^{\omega+1}$ n'introduira, qu'il soit positif ou négatif, qu'une nouvelle variation qui se présente jusqu'au terme en x^{ω}.

En suivant de même, on remarquera qu'à chaque variation du multiplicande en correspond une du produit, et, comme dans le multiplicande tous les termes depuis Kx^{ρ} ont le même signe, de même, dans le produit, tous les termes depuis celui en x^{ρ} ont le même signe.

Nous avons ainsi montré que le nombre des variations *n'augmentera pas* par la multiplication par $x+a$; mais il est possible qu'il devienne moindre; la démonstration précédente donne par exemple, entre les termes $+B'x^{\nu+1}$ et $-Bx^{\nu}$, une variation au multiplicande et de même une au produit entre les termes $Ax^{\mu+1}$ et $(-B''-aB)x^{\nu}$, mais cela quand les termes $-B''x^{\nu-1}$, etc., jusqu'au terme $-Cx^{\omega+2}$ existent dans le polynôme primitif; si, au contraire, on n'a que le terme $-Bx^{\nu}$, alors on aura le produit

$$(\text{termes posit.})+(-B+aB')x^{\nu+1}+(C-aB)x^{\nu}+\dots$$

D'où l'on voit que si $-B+aB'>0$ et $C-aB>0$, une variation sera effectivement perdue.

3. Passons au cas d'un polynôme incomplet.

En multipliant par $x+a$ on n'augmentera pas les variations. Car on passe du polynôme complet à l'incomplet, en égalant à zéro quelques coefficients du polynôme complet, tels que les variations restent les mêmes. Alors, évidemment, le produit ne présentera pas plus de variations qu'avant. Car, ou bien quelques termes du produit, positifs ou négatifs, s'annuleront (ce qui n'influence pas les variations) ou bien quelques coefficients positifs deviendront plus petits, tout en restant positifs, ou quelques coefficients négatifs deviendront plus petits en valeur absolue, tout en restant négatifs (ce qui ne nuit pas aux variations), ou bien parmi les coefficients de $x^{\nu+1}$, $x^{\omega+1}$, ..$x^{\rho+1}$, quelques-uns vont changer de signe, ce qui n'augmentera pas les variations; en effet, comme nous l'avons déjà dit, ces coefficients seront de mêmes signes que les précédents ou que les suivants, donc, dans tous les cas, le nombre des variations n'augmente pas.

4. *Corollaire.* — En multipliant par $x+a$, on trouve une limite supérieure du nombre des racines positives égale à celle trouvée par le théorème de Descartes, ou même plus approchée. En effet, la multiplication par $x+a$ n'ajoute aucune racine positive au polynôme; d'autre part, le nombre des variations peut diminuer, mais nullement augmenter.

5. *Règle pour trouver rapidement les coefficients du produit par* x + 1.

Le produit du polynôme

$$a_0x^{\mu} + a_1x^{\mu-1} + a_2x^{\mu-2} + \ldots + a_{\mu}$$

par $x+1$ donne

$$a_0x^{\mu+1} + (a_0+a_1)x^{\mu} + (a_1+a_2)x^{\mu-1} + (a_2+a_3)x^{\mu-2}\ldots\ldots$$

D'où la règle :

Pour trouver le coefficient de x^{ν} j'ajoute $a_{\mu-\nu}$ à $a_{\mu-\nu+1}$.

6. *Remarque 1.* — Un polynôme dont toutes les racines sont réelles et positives a précisément autant de variations que de racines.

$f(x) = (x-a)(x-b)\ldots(x-k)$	$\alpha, \beta, \gamma, \ldots k$
Ces racines sont au nombre de ν ;	tous positifs.

Je dis que le polynôme ne présentera pas plus de ν variations. En effet, il n'a que $\nu+1$ termes. D'après le théorème de Descartes, il ne peut pas y avoir moins de variations; donc il y aura ν.

7. *Remarque 2.* — La proposition connue : « Tout polynôme n'ayant que des racines réelles, a précisément autant de racines

positives que de variations » peut être démontrée très facilement d'après ce qui précède. Soient

$$a, b, c, d, e, -i, -k, -l$$

les racines d'un polynôme; on a donc

$$(x-a)(x-b)\ldots(x-e)(x+i)\ldots(x+l)=0.$$

Les cinq premiers facteurs donneront, d'après la remarque *1*, un polynôme avec cinq variations, qui multiplié par $(x+i)$, n'aura pas plus de variations qu'avant (peut-être moins).

Mais ici le nombre des variations ne diminuera pas; car, d'après le théorème de Descartes, il y aura nécessairement autant de variations que de racines positives c'est-à-dire cinq variations. On démontrera la même chose pour la multiplication par $(x+k)$ et $(x+l)$.

8. *Cas où l'on peut effectivement trouver une limite plus rapprochée des racines positives que par le théorème de Descartes.*

Soit un polynôme avec trois termes alternativement positifs et négatifs :

$$a_0 x^{\mu} + a_1 x^{\mu-1} \ldots\ldots + a_{\nu-1} x^{\mu-\nu+1} - a'_{\nu} x^{\mu-\nu} + a_{\nu+1} x^{\mu-\nu-1} \ldots\ldots + a_{\mu}$$

Je dis que, si l'on a

$$\frac{a_{\nu+1}}{a'_{\nu}} > \frac{a'_{\nu}}{a_{\nu-1}},$$

où

$$a_{\nu-1},\ a'_{\nu},\ a_{\nu+1}$$

sont tous positifs, le nombre des racines positives sera nécessairement moindre, au moins d'une unité, que celui des variations; il serait donc, d'après le théorème de Descartes, moindre au moins de deux unités. En effet, puisque

$$\frac{a_{\nu+1}}{a'_{\nu}} > \frac{a'_{\nu}}{a_{\nu-1}},$$

il est évident que l'on peut choisir un nombre positif a tel que

$$\frac{a_{\nu+1}}{a'_{\nu}} > a > \frac{a'_{\nu}}{a_{\nu-1}}.$$

Multiplions le polynôme

$$a_0x^{\mu}+\ldots+a_{\nu-2}x^{\mu-\nu+2}+a_{\nu-1}x^{\mu-\nu+1}-a'_{\nu}x^{\mu-\nu}+a_{\nu+1}x^{\mu-\nu-1}+a_{\nu+2}x^{\mu-\nu-2}+\ldots\ldots$$

par $x+a$; nous aurons

$$a_0x^{\mu+1}\ldots+(aa_{\nu-1}-a'_{\nu})x^{\mu-\nu+1}+\left(a_{\nu+1}-aa'_{\nu}\right)x^{\mu-\nu}+\ldots\ldots$$

Nous remarquons, comme dans la première démonstration, que, pour que le produit ait autant de variations que le multiplicande, il faut qu'à la variation du multiplicande présentée par les termes

$$a_{\nu-1}x^{\mu-\nu+1} \text{ et } a'\ x^{\nu-\mu}$$

en corresponde une du produit entre les termes

$$(aa_{\nu-1}-a'_{\nu})\ x^{\mu-\nu+1}$$

et

$$(a_{\nu+1}-aa'_{\nu})x^{\mu-\nu}.$$

Mais, d'après notre hypothèse, les coefficients

$$aa_{\nu-1}-a'_{\nu} \text{ et } a_{\nu+1}-aa'_{\nu}$$

sont tous les deux positifs.

Car $\dfrac{a'_{\nu}}{a_{\nu-1}}<a$, d'où $a'_{\nu}<a\ a_{\nu-1}$ puisque $a_{\nu-1}>0$, et par conséquent $0<aa_{\nu-1}-a'$. De même puisque $\dfrac{a_{\nu+1}}{a'_{\nu}}>a$, on a $a_{\nu+1}>a'_{\nu}a$, et $a_{\nu+1}-a'_{\nu}\,a>0$.

9. *Application.* — Soit le polynôme.

$$a_0\,x^{\mu}+\cdots+a_{\nu-1}\,x^{\mu-\nu+1}+a_{\nu}\,x^{\mu-\nu}+a_{\nu+1}\,x^{\mu-\nu+1}+a_{\nu+2}\,x^{\mu-\nu-2}+\ldots+a_{\mu};$$

les coefficients

$$a_{\nu},\ a_{\nu+1},\ a_{\nu+2}$$

sont supposés alternativement positifs et négatifs. En outre nous admettons encore que

$$|a_{\nu+1}| < |a_\nu|,$$

$$|a_{\nu+1}| < |a_{\nu+2}|.$$

Il en résulte l'inégalité

$$\left|\frac{a_{\nu+1}}{a_\nu}\right| < \left|\frac{a_{\nu+2}}{a_{\nu+1}}\right|,$$

car

$$\left|\frac{a_{\nu+1}}{a_\nu}\right| < 1 \text{ et } \left|\frac{a_{\nu+2}}{a_{\nu-1}}\right| > 1$$

et on retombe, par conséquent, dans le cas précédent, c'est-à-dire que le polynôme aura un nombre de racines positives inférieur d'une unité au nombre des variations.

P. Zervos (Athènes).

SUR LE THÉORÈME DE DESCARTES

Dans la démonstration suivante du théorème de Descartes nous employons le théorème de Rolle.

Laguerre (*Œuvres complètes*, I) a aussi donné une démonstration du même théorème fondée sur le théorème de Rolle. Mais notre démonstration diffère essentiellement de la sienne. Elle montre comment, étant donné un polynôme, on trouve une limite supérieure du nombre des racines positives au moyen de la limite supérieure du nombre des racines positives de sa dérivée d'un certain ordre.

1. Si nous exprimons par n le nombre des variations d'un polynôme entier à coefficients réels, le nombre de ses racines positives est $n - 2t$, où t est un entier positif ou zéro.