

<b>Zeitschrift:</b>	L'Enseignement Mathématique
<b>Herausgeber:</b>	Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
<b>Band:</b>	3 (1901)
<b>Heft:</b>	1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE
<b>Artikel:</b>	INTERPRÉTATION GÉOMÉTRIQUE DES DÉRIVÉES PARTIELLES DANS LA THÉORIE DES COURBES ET DES SURFACES ALGÉBRIQUES
<b>Autor:</b>	Laisant, C.-A.
<b>DOI:</b>	<a href="https://doi.org/10.5169/seals-4669">https://doi.org/10.5169/seals-4669</a>

#### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 16.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

en appelant A et B les abscisses minimum et maximum des points du contour. Cela résulte encore de la remarque faite au début de ce travail, puisque  $x_r$  et  $x_{r+1}$  comprennent toujours entre elles A, et que B est toujours comprise entre  $x_{s-1}$  et  $x_s$ .

La méthode que nous venons de suivre montre, non seulement que la somme étudiée a une limite, mais que cette limite est la même quelle que soit la loi suivant laquelle on fait varier les distances analogues à  $x_{i+1} - x_i$  et à  $y_{k+1} - y_k$  qui interviennent dans notre démonstration. En effet, l'expression (6) conserve toujours la même valeur quelle que soit cette loi. De plus, nous aurions pu faire la même démonstration en intervertissant les rôles des différences  $x_{i+1} - x_i$ ,  $y_{k+1} - y_k$ . Nous aurions trouvé une expression de la limite cherchée, différente de (6) quant à la forme, mais devant avoir même valeur numérique et même signe. De là le théorème usuel sur la possibilité d'intervertir l'ordre des intégrations indiquées dans la formule (6) sans changer le résultat.

V. JAMET (Marseille).

---

## INTERPRÉTATION GÉOMÉTRIQUE DES DÉRIVÉES PARTIELLES

DANS LA THÉORIE DES COURBES ET DES SURFACES ALGÉBRIQUES

---

1. — Dans l'étude des coniques et des quadriques, on considère constamment les dérivées partielles, prises par rapport aux coordonnées, du premier membre de l'équation de la courbe ou de la surface; et il en est de même dans la théorie des surfaces algébriques en général. ..

Il semble dès lors intéressant de se demander quelle est la signification géométrique de ces dérivées, notamment lorsque l'on y remplace les coordonnées courantes par celles d'un point de la figure. Cela peut être en même temps utile pour certaines applications.

En ce qui concerne les figures du second ordre, cette interprétation est d'une telle simplicité qu'on peut sans exagération la considérer comme intuitive; et cependant les nombreux traités de Géométrie analytique que j'ai consultés sont muets sur ce point. D'autre part, les renseignements, recueillis verbalement par moi, de plusieurs professeurs de mathématiques spéciales, me portent à croire que la remarque dont il s'agit est nouvelle, en dépit de son extrême simplicité. Je dois ajouter qu'elle s'est présentée tout récemment à mon esprit, bien que depuis de fort longues années je n'aie guère cessé de m'occuper de Géométrie analytique. C'est une preuve de plus que les choses les plus simples et les plus faciles ne s'aperçoivent pas toujours immédiatement; cela montre aussi que dans l'enseignement de la Géométrie analytique, — et cela un peu partout — le calcul a pris une place peut être excessive, si bien que toute l'attention se porte sur le symbole et nous fait trop oublier l'objet.

Dans ce qui va suivre, je me propose d'établir les remarques dont je viens de parler, et d'en montrer quelques rapides applications.

2. — J'examinerai d'abord, pour plus de simplicité, ce qui concerne les figures du second ordre; et je considérerai tout de suite les quadriques, car les résultats obtenus seront applicables immédiatement aux coniques, par analogie, avec une facilité plus grande encore.

Soit donc l'équation d'une quadrique en coordonnées cartésiennes

$$f(x, y, z) = Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + \dots = 0,$$

la surface étant rapportée à des axes coordonnés quelconques.

Appelons  $x_1, y_1, z_1$ , les coordonnées d'un point  $M$  de la surface. Si nous menons par ce point des parallèles aux trois axes coordonnés, les nouveaux points d'intersection,  $M_1, M'_1, M''_1$ , détermineront trois cordes  $\overline{M_1 M}$ ,  $\overline{M'_1 M}$ ,  $\overline{M''_1 M}$ , et nous aurons

$$\overline{M_1 M} = \frac{f'_{x_1}(x_1, y_1, z_1)}{A}, \quad \overline{M'_1 M} = \frac{f'_{y_1}(x_1, y_1, z_1)}{A'}, \quad \overline{M''_1 M} = \frac{f'_{z_1}(x_1, y_1, z_1)}{A''}.$$

Ces relations existent en grandeur et en signe.

Elles sont tellement évidentes, il faut le répéter, qu'on les constate plutôt qu'on ne les démontre. Le moyen le plus simple est peut-être de remarquer que l'équation  $f'_x = 0$  représentant le plan diamétral conjugué à la direction de l'axe des  $x$ , la distance du point  $(x, y, z)$  à ce plan, comptée suivant la direction de cet axe, a pour expression  $\frac{f'_x}{2A}$ , et que la corde  $M_1M$  est double de cette distance. De même pour les deux autres cordes.

Cependant, et en vue d'une généralisation ultérieure, nous allons présenter une démonstration proprement dite de la propriété dont il s'agit. Si dans l'équation  $f(x, y, z) = 0$  nous considérons provisoirement  $y$  et  $z$  comme des constantes, nous pouvons l'écrire

$$F(x) = A(x - x_1)(x - x_2) = 0.$$

Alors  $f'_x(x, y, z)$  et  $F'(x)$  sont identiques; et  $x_1, x_2$  sont des fonctions de  $y$  et de  $z$ . Si on donne à  $y$  et  $z$  des valeurs particulières  $y_1, z_1$ , les racines  $x_1, x_2$  seront les abscisses des intersections de la surface et de la droite  $y = y_1, z = z_1$ .

Or,

$$F'(x) = \frac{F(x)}{x - x_1} + \frac{F(x)}{x - x_2}.$$

Dans cette identité, faisons  $x = x_1$ ; elle deviendra

$$F'(x_1) = A(x_1 - x_2),$$

ou

$$f'_{x_1}(x_1, y_1, z_1) = A(x_1 - x_2),$$

ce qui démontre la propriété, puisque  $x_1 - x_2$  représente justement la corde  $M_1M$ . Il est clair que la même démonstration s'applique aux deux autres dérivées partielles.

3. — La propriété que nous venons d'indiquer se prête à de nombreuses applications. Nous nous bornerons ici à quelques exemples.

1<sup>o</sup> Trouver sur une conique un point  $M$  tel que les cordes  $\overline{MM_1}$ ,  $\overline{MM'_1}$ , menées par ce point parallèlement à deux directions données, soient entre elles dans un rapport donné  $k$ .

On doit avoir  $\overline{M_1M} = k\overline{M'_1M}$ , ou  $\frac{f'_x}{A} = \pm k \frac{f'_y}{C}$ ,

si la conique est rapportée à deux axes parallèles aux directions données et a pour équation  $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + \dots = 0$ .

Donc, en coupant la conique par les droites  $Cf'_x \pm kAf'_y = 0$ , on a les solutions. L'ambiguïté du double signe disparaîtrait si l'on s'était donné un sens des directions positives sur chacune des deux directions. Le rapport  $k$  pourrait être alors positif ou négatif.

Plus généralement, si l'on se proposait d'avoir entre les deux cordes  $\overline{M_1M} = u$ ,  $\overline{M'_1M} = v$ , considérées en grandeur et en signe, une relation donnée  $\varphi(u, v) = 0$ , on rapporterait la conique à deux demi-droites  $Ox$ ,  $Oy$  parallèles aux directions positives données, et l'on aurait  $\varphi\left(\frac{f'_x}{A}, \frac{f'_y}{C}\right) = 0$ . Les intersections de cette courbe, dont l'ordre est le même que le degré de la fonction  $\varphi$ , avec la conique, donneraient les points recherchés.

2° *Sur une quadrique, trouver le lieu des points M tel que les trois cordes  $\overline{M_1M} = u$ ,  $\overline{M'_1M} = v$ ,  $\overline{M''_1M} = w$ , aboutissant à ce point et parallèles à trois demi-droites données, satisfassent à une relation donnée  $\varphi(u, v, w) = 0$ .*

Les axes  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$  étant pris parallèles aux trois demi-droites, on aura

$$\varphi\left(\frac{f'_x}{A}, \frac{f'_y}{A'}, \frac{f'_z}{A''}\right) = 0.$$

L'intersection de cette surface avec la quadrique donnera le lieu demandé.

On tirera de là tous les cas particuliers que l'on voudra. Il est seulement bon de remarquer que la nouvelle surface est d'un ordre égal au degré de la fonction  $\varphi$ . Si celle-ci est linéaire, par exemple, le lieu cherché sera par conséquent une conique.

3° *Trouver sur une quadrique un point tel que les trois cordes  $u, v, w$ , définies ci-dessus, satisfassent à deux relations données  $\varphi(u, v, w) = 0$ ,  $\psi(u, v, w) = 0$ .*

D'après ce qui précède, il faudra prendre les intersections des deux surfaces

$$\varphi\left(\frac{f'_n}{A}, \frac{f'_y}{A'}, \frac{f'_z}{A''}\right) = 0, \quad \psi\left(\frac{f'_x}{A}, \frac{f'_y}{A'}, \frac{f'_z}{A''}\right) = 0.$$

avec la quadrique. Si  $m, n$  sont les degrés respectifs des fonctions  $\psi, \varphi$ , le nombre des solutions sera  $2m n$ .

Comme cas particulier très simple, soit à rechercher les points pour lesquels les trois cordes  $\overline{M_1M}$ ,  $\overline{M'_1M}$ ,  $\overline{M''_1M}$  sont égales. Il vient alors

$$\frac{f'_x}{A} = \frac{f'_y}{A'} = \frac{f'_z}{A''},$$

et les deux points d'intersection de cette droite avec la quadrique sont les points cherchés. Si l'on demandait que les trois cordes fussent égales en longueur seulement, il faudrait affecter de doubles signes les expressions précédentes. Au lieu d'une droite on en aurait alors quatre; et au lieu de deux points on en aurait huit.

#### 4° Plan tangent à une quadrique.

Au point  $M$  que nous avons considéré, le plan tangent est parallèle à celui qui a pour équation  $Xf'_x + Yf'_y + Zf'_z = k$ . Si donc on porte sur les cordes  $\overline{MM_1}$ ,  $\overline{MM'_1}$ ,  $\overline{MM''_1}$  des longueurs  $\overline{MT_1}$ ,  $\overline{MT'_1}$ ,  $\overline{MT''_1}$ , proportionnelles à  $\frac{1}{f'_x}$ ,  $\frac{1}{f'_y}$ ,  $\frac{1}{f'_z}$ , le plan  $T_1T'_1T''_1$  sera parallèle au plan tangent, ou ce qui revient au même, la perpendiculaire à  $T_1T'_1T''_1$  menée par  $M$  sera la normale à la surface. Il suffit pour cela de construire

$$\overline{MT_1} = \frac{h^2}{A \cdot \overline{MM_1}}, \quad \overline{MT'_1} = \frac{h^2}{A'_1 \cdot \overline{MM'_1}}, \quad \overline{MT''_1} = \frac{h^2}{A''_1 \cdot \overline{MM''_1}}.$$

Dans le cas particulier des coordonnées rectangulaires, si l'on construit  $\overline{MN_1} = \overline{A \cdot MM_1}, \dots$  la diagonale du parallélépipède formé sur  $MN_1, MN'_1, MN''_1$ , sera la normale en  $M$  à la quadrique.

4. — Il est facile de représenter géométriquement les dérivées partielles, alors que le point  $(x, y, z)$  considéré n'est pas situé sur la surface, comme nous l'avons supposé jusqu'à présent.

Retenant pour cela le calcul que nous avons indiqué ci-dessus (2), nous avons identiquement

$$f(x, y, z) = F(x) = A(x - x_1)(x - x_2)$$

$$f'_x(x, y, z) = F'(x) = \frac{F(x)}{x - x_1} + \frac{F(x)}{x - x_2} = A(2x - x_1 - x_2).$$

Or, si  $MM_1M_2$  est une corde parallèle à  $Ox$ , passant par le

point  $M$  considéré, et coupant la surface en  $M_1$  et  $M_2$ , on a  $x - x_1 = \overline{M_1 M}$ ,  $x - x_2 = \overline{M_2 M}$ . Par conséquent

$$\frac{f(x,y,z)}{A} = \overline{M_1 M} \cdot \overline{M_2 M}, \quad \frac{f'_x}{A} = \overline{M_1 M} + \overline{M_2 M}.$$

On aurait des relations analogues en coupant la surface par des droites parallèles à  $Oy$  et  $Oz$ .

Ceci nous donne incidemment une représentation géométrique de la fonction  $f$ , en même temps que de ses dérivées partielles, quand on y remplace les cordonnées  $x$ ,  $y$ ,  $z$  par celles d'un point quelconque. Cela nous permet, comme conséquence, d'obtenir les coefficients  $A$ ,  $A'$ ,  $A''$  de l'équation (ou du moins des quantités proportionnelles), quand on a les trois cordes  $M_1 M_2 M$ ,  $M'_1 M'_2 M$ ,  $M''_1 M''_2 M$ , qui vont concourir en  $M$ . Si nous construisons en effet

$$\begin{aligned} \overline{M M_1} \cdot \overline{M M_2} &= \pm \overline{M K}^2, \\ \overline{M M'_1} \cdot \overline{M M'_2} &= \pm \overline{M K'}^2, \\ \overline{M M''_1} \cdot \overline{M M''_2} &= \pm \overline{M K''}^2, \end{aligned}$$

on voit que  $A$ ,  $A'$ ,  $A''$  seront respectivement proportionnels à  $\frac{1}{\pm M K^2}$ ,  $\frac{1}{\pm M K'^2}$ ,  $\frac{1}{\pm M K''^2}$ .

Alors  $f'_x$  sera exprimé par  $\frac{\overline{M_1 M} + \overline{M_2 M}}{\pm M K^2}$ , ou  $\frac{2 \overline{P M}}{\pm M K^2}$ , en appelant  $P$  le milieu de la corde  $\overline{M_1 M_2}$ ; et de même pour les dérivées partielles  $f'_y$ ,  $f'_z$ .

5. — Il nous est également possible d'arriver à une représentation géométrique de la dérivée du premier membre de l'équation d'une quadrique

$$f(x,y,z,t) = Ax^2 + \dots + Dt^2 = 0$$

par rapport à la variable d'homogénéité, lorsque cette équation a été rendue homogène.

A cet effet, nous écrirons ce premier membre  $D(t - t_1)(t - t_2)$ ,  $t_1$ ,  $t_2$  étant des fonctions de  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . D'autre part, on a aussi

$$f(x,y,z,t) = Dt^2 + t\varphi_1(x,y,z) + \varphi_2(x,y,z),$$

$\varphi_1$  et  $\varphi_2$  étant des fonctions homogènes dont le degré est marqué par l'indice.

Si nous appelons  $\alpha, \beta, \gamma$  les paramètres directeurs de la droite qui joint l'origine au point  $M$ , de coordonnées  $x, y, z$ , et  $\rho$  la longueur  $\overline{OM}$ , il vient

$$f(x, y, z) = D + \rho_1 \varphi_1(\alpha, \beta, \gamma) + \rho^2 \varphi_2(\alpha, \beta, \gamma).$$

Appelons  $\rho_1, \rho_2$  les longueurs  $\overline{OM}_1, \overline{OM}_2$ , en grandeur et en signe,  $M_1, M_2$  étant les intersections de la surface par la droite  $\overline{OM}$ ; et  $\rho$  étant connu, posons  $\frac{\rho}{r} = s$ ;  $r$  désigne alors le rayon vecteur d'un point quelconque de  $\overline{OM}$ , et  $\rho_1, \rho_2$  sont les valeurs particulières de  $r$  qui correspondent à  $M_1$  et  $M_2$ .

L'équation qui a pour racines  $\rho_1, \rho_2$  est

$$D + r\varphi_1(\alpha, \beta, \gamma) + r^2\varphi_2(\alpha, \beta, \gamma) = 0,$$

ou

$$D + \frac{r}{\rho} \varphi_1(x, y, z) + \frac{r^2}{\rho^2} \varphi_2(x, y, z) = 0$$

ou enfin

$$D \frac{\rho^2}{r^2} + \frac{\rho}{r} \varphi_1(x, y, z) + \varphi_2(x, y, z) = 0;$$

c'est-à-dire,

$$Ds^2 + s\varphi_1(x, y, z) + \varphi_2(x, y, z) = 0.$$

Cette équation étant identique avec l'équation en  $t$ , il s'ensuit que les deux racines  $t_1, t_2$  sont  $\frac{\rho}{\rho_1}, \frac{\rho}{\rho_2}$ , ou  $\frac{\overline{OM}}{\overline{OM}_1}, \frac{\overline{OM}}{\overline{OM}_2}$ .

Le premier membre  $f(x, y, z)$  de l'équation de la surface, qui s'obtient en faisant  $t=1$  dans l'équation rendue homogène, a donc pour expression

$$D \left( 1 - \frac{\overline{OM}}{\overline{OM}_1} \right) \left( 1 - \frac{\overline{OM}}{\overline{OM}_2} \right) = D \frac{\overline{MM}_1 \cdot \overline{MM}_2}{\overline{OM}_1 \cdot \overline{OM}_2}.$$

Or, puisque  $f(x, y, z, t) = D(t - t_1)(t - t_2)$ , on a l'identité

$$f'_t(x, y, z, t) = D(2t - t_1 - t_2).$$

Cela nous donne pour l'expression cherchée de  $f'_t$ ,

$$D \left( 2 - \frac{\overline{OM}}{\overline{OM}_1} - \frac{\overline{OM}}{\overline{OM}_2} \right) = D \left( \frac{\overline{MM}_1}{\overline{OM}_1} + \frac{\overline{MM}_2}{\overline{OM}_2} \right).$$

En définitive, si, sur la droite  $\overline{OM}$ , qui coupe la surface en  $M_1$ ,

$M_2$  nous construisons le point  $H$  conjugué harmonique de  $O$  par rapport à  $\overline{M_1 M_2}$ , ce qui donne  $\frac{1}{\overline{OM_1}} + \frac{1}{\overline{OM_2}} = \frac{2}{\overline{OH}}$ , l'expression géométrique de  $f'_t$  sera

$$2D \frac{\overline{MH}}{\overline{OH}}.$$

Pour un point placé sur la quadrique,  $M_1$  par exemple, l'expression serait  $2 D \frac{\overline{M_1 H}}{\overline{OH}}$ , et pour l'autre  $2 D \frac{\overline{M_2 H}}{\overline{OH}}$ . Il s'ensuit que le rapport des valeurs de  $f'_t$  répondant aux deux points  $M_1, M_2$  est

$$\frac{\overline{M_1 H}}{\overline{M_2 H}} = - \frac{\overline{OM_1}}{\overline{OM_2}}.$$

6. — En résumant les résultats que nous venons d'obtenir, appliqués à un point quelconque, nous pouvons énoncer les propositions suivantes.

*Si, dans le premier membre de l'équation d'une quadrique*

$$f(x, y, z) = Ax^2 + A'y^2 + \dots + D = 0,$$

*et dans sa dérivée  $f'_x(x, y, z)$  nous remplaçons les coordonnées  $x, y, z$ , par celles d'un point  $M$  ; si d'autre part,  $MM_1 M_2$ , est une parallèle à  $Ox$  qui perce la surface en  $M_1, M_2$ , nous aurons  $f(x, y, z) = A \cdot \overline{MM_1} \cdot \overline{MM_2}$ ,  $f'_x(x, y, z) = A \left( \frac{\overline{MM_1}}{\overline{OM_1}} + \frac{\overline{MM_2}}{\overline{OM_2}} \right)$  ; et de même, bien entendu, pour les dérivées  $f'_y, f'_z$ .*

*Si, avec les mêmes notations, nous appelons  $P_1, P_2$ , les points où la droite  $\overline{OM}$  perce la quadrique, nous aurons*

$$f(x, y, z) = D \frac{\overline{MM_1} \cdot \overline{MM_2}}{\overline{OM_1} \cdot \overline{OM_2}}, f'_t(x, y, z, t) = D \left( \frac{\overline{MM_1}}{\overline{OM_1}} + \frac{\overline{MM_2}}{\overline{OM_2}} \right).$$

7. — Essayons maintenant d'arriver à des figurations analogues pour les coniques rapportées à des coordonnées trilinéaires, ou pour les quadriques en coordonnées tétraédriques. Nous nous bornerons à ce dernier cas, l'application aux coniques en résultant d'une façon évidente, et nous supposerons qu'il est fait usage de coordonnées barycentriques.

Soit  $f(x, y, z, t) = Ax^2 + \dots = 0$  l'équation d'une quadrique

rapportée au tétraèdre ABCD. Désignons par  $x, y, z, t$  les coordonnées d'un point quelconque M de l'espace, et considérons la droite  $\overline{AM}$  qui perce la quadrique en  $M_1$  et  $M_2$ .

Proposons-nous de chercher les coordonnées de ces deux points  $M_1, M_2$ . Nous pouvons prendre  $y, z, t$  pour trois coordonnées de chacun d'eux, et il n'y a à déterminer que la coordonnée  $x_1$  pour  $M_1$  et  $x_2$  pour  $M_2$ . Ces valeurs  $x_1, x_2$  sont les racines de l'équation  $Ax^2 + \dots = 0$ , où  $y, z, t$  sont considérées comme données.

Or, nous avons les équipollences

$$(x+y+z+t) \overline{AM} = y \overline{AB} + z \overline{AC} + t \overline{AD},$$

$$(x_1 + y + z + t) \overline{AM} = r \overline{AB} + z \overline{AC} + t \overline{AD},$$

$$(x_2 + y + z + t) \overline{AM}_2 = r \overline{AB} + z \overline{AC} + t \overline{AD}.$$

Dans ces relations, les coordonnées, par cela même qu'elles sont homogènes, n'interviennent en réalité que par leurs rapports. Nous pouvons les rendre absolues en supposant que nous nous imposons la condition

$$x+y+z+t \equiv 1.$$

Dès lors, les relations ci-dessus nous donnent

$$\overline{AM} = \overline{A_1M} (1 - x + x_1) = \overline{AM_2} (1 - x + x_2);$$

de là.

$$x - x_1 = 1 - \frac{\overline{AM}}{\overline{AM}_1} = \frac{\overline{MM}_1}{\overline{AM}_1},$$

$$x - x_2 = 1 - \frac{\overline{AM}}{\overline{AM}_2} = \frac{\overline{MM}_2}{\overline{AM}_2}$$

Le premier membre de l'équation de la quadrique, qui peut s'écrire

$$\mathbf{A}(x - x_1)(x - x_2) \equiv f(x, y, z, t)$$

a donc pour expression géométrique

$$A \frac{\overline{MM_1} \cdot \overline{MM_2}}{\overline{AM_1} \cdot \overline{AM_2}} \quad (1)$$

<sup>(1)</sup> Dans cette expression et dans quelques-unes des précédentes, nous employons la lettre A (et aussi B, C, D) pour déterminer, tantôt les sommets du

De l'identité précédente nous tirons

$$f'_x = \frac{f}{x - x_1} + \frac{f}{x - x_2} = A(x - x_1 + x - x_2),$$

ou

$$f'_x = A \left( \frac{\overline{MM_1}}{\overline{AM_1}} + \frac{\overline{MM_2}}{\overline{AM_2}} \right).$$

Cette dérivée partielle  $f'_x$  peut encore s'exprimer sous une autre forme. Si  $H_a$  indique le conjugué harmonique du sommet  $A$  par rapport au segment  $\overline{M_1 M_2}$ , nous avons

$$f'_x = A \left( 2 - \frac{\overline{AM}}{\overline{AM_1}} - \frac{\overline{AM}}{\overline{AM_2}} \right) = 2A \left( 1 - \frac{\overline{AM}}{\overline{AH_a}} \right) = 2A \frac{\overline{H_a M}}{\overline{H_a A}},$$

et aussi

$$f'_x = 2A \frac{\overline{MM_1}}{\overline{AM_1}} \cdot \frac{\overline{MM_2}}{\overline{AM_2}} \frac{\overline{H'_a A}}{\overline{H'_a M}},$$

si  $H'_a$  est le conjugué harmonique de  $M$  par rapport à  $\overline{M_1 M_2}$ .

Nous résumerons dans les deux propositions suivantes les résultats que nous venons d'obtenir:

*Une quadrique étant rapportée, en coordonnées barycentriques, au tétraèdre ABCD, appelons x, y, z, t les coordonnées d'un point M de l'espace, la condition  $x + y + z + t = 1$  étant remplie; soient  $M_1, M_2$  les points de rencontre de  $\overline{AM}$  avec la surface, et  $H_a, H'_a$  les points conjugués harmoniques de A et de M par rapport à  $\overline{M_1 M_2}$ ; soit enfin f = 0 l'équation de la quadrique.*

I. — *Si dans la fonction f, on remplace les coordonnées courantes par celles du point M, le résultat de cette substitution sera*

$$A \frac{\overline{MM_1}}{\overline{AM_1}} \cdot \frac{\overline{MM_2}}{\overline{AM_2}}.$$

*le coefficient A étant celui de  $x^2$  dans l'équation de la surface.*

---

tétraèdre de référence, tantôt les coefficients de  $x^2, y^2, z^2, t^2$  dans le premier membre de l'équation de la quadrique. Mais aucune confusion n'est possible, et il nous a paru au contraire que l'exposition n'aurait qu'à gagner en clarté à cette identité des notations.

Par conséquent

$$f(x, y, z) = A \cdot \overline{M_1 M} \cdot \overline{M_2 M} \cdots \overline{M_p M}$$

$$f'_x(x, y, z) = A \cdot \overline{M_1 M} \cdots \overline{M_p M} \left( \frac{1}{\overline{M_1 M}} + \cdots + \frac{1}{\overline{M_p M}} \right).$$

Si, en particulier, M est sur la surface, ce point coïncide avec l'un des points  $M_1, \dots, M_p$ , avec  $M_1$  par exemple, et alors

$$f'_x(x, y, z) = A \cdot \overline{M_2 M} \cdot \overline{M_3 M} \cdots \overline{M_p M}.$$

En général, si la moyenne proportionnelle des segments  $\overline{MM_1}, \overline{MM_2}, \dots, \overline{MM_p}$  est  $\overline{MP}$  (en tenant compte du principe des signes, bien entendu, ce qui peut amener le point P à être imaginaire) et si  $H'$  est le centre harmonique des points  $M_1, \dots, M_p$  par rapport à M pris comme pôle, nous aurons

$$f(x, y, z) = A \cdot \overline{PM}^p,$$

$$f'_x(x, y, z) = Ap \cdot \frac{\overline{PM}^p}{\overline{HM}}.$$

Il est bon de rappeler que le coefficient A peut être, soit un nombre constant, soit une fonction des coordonnées  $y$  et  $z$  du point M.

Si le point M est tel que la somme des inverses des segments  $\overline{MM_1}, \dots, \overline{MM_p}$  soit nulle, on a  $f'_x(x, y, z) = 0$ ; d'où une définition directe de la surface représentée par cette dernière équation en considérant  $x, y, z$  comme des coordonnées courantes.

Il est clair que l'on obtient des résultats analogues pour les autres coordonnées  $y, z$ .

9. — Cherchons, par extension des considérations indiquées au n° 5, à interpréter la dérivée  $f'_t$  du premier membre de l'équation d'une surface algébrique, par rapport à la variable d'homogénéité, lorsqu'on remplace les coordonnées courantes par celles d'un point M quelconque.

L'équation  $f = 0$  peut s'écrire

$$Dt^p + \cdots = 0,$$

ou

$$D(t - t_1) \cdots (t - t_p) = 0,$$

$p$  étant égal au degré  $n$  de la surface si celle-ci ne passe pas par l'origine, auquel cas  $D$  est une constante. Autrement,  $D$  sera une certaine fonction des coordonnées  $x, y, z$ .

Si nous voulons déterminer maintenant les intersections (autres que l'origine) d'une droite joignant l'origine au point  $M_1$  de coordonnées  $x, y, z$ , nous pouvons écrire le premier membre, en groupant les termes homogènes,

$$\varphi_{n-p}(x, y, z) + \dots + \varphi_n(x, y, z),$$

et  $\varphi_{n-p}$  est identique à  $D$ .

Posant  $x = \alpha\rho, y = \beta\rho, z = \gamma\rho$ , et prenant pour inconnue le rapport  $\frac{\rho}{r} = s$ , en appelant  $r$  le rayon vecteur d'un point de  $OM$  qui devra se trouver sur la surface, nous obtenons, après avoir supprimé les  $n-p$  racines nulles,

$$\frac{\rho^p}{r^p} \varphi_{n-p}(x, y, z) + \dots + \varphi_n(x, y, z) = 0,$$

ou

$$\varphi_{n-p}(x, y, z) \cdot s^p + \dots + \varphi_n(x, y, z) = 0.$$

Les équations en  $s$  et en  $t$  sont donc identiques, c'est-à-dire que les racines  $t_1, t_2, \dots, t_p$  représentent les rapports

$$\frac{\overline{OM}}{\overline{OM}_1}, \frac{\overline{OM}}{\overline{OM}_2}, \dots, \frac{\overline{OM}}{\overline{OM}_p},$$

les points  $M_1, M_2, \dots, M_p$  étant ceux où la droite  $\overline{OM}$  perce la surface.

Par suite, le premier membre de cette dernière, ou  $f(x, y, z)$  a pour expression géométrique

$$D \left( 1 - \frac{\overline{OM}}{\overline{OM}_1} \right) \dots \left( 1 - \frac{\overline{OM}}{\overline{OM}_p} \right),$$

ou

$$D \frac{\overline{MM}_1 \dots \overline{MM}_p}{\overline{OM}_1 \dots \overline{OM}_p}.$$

On a en outre

$$f'_t(x, y, z, t) = f(x, y, z, t) \left[ \frac{1}{t - t_1} + \dots + \frac{1}{t - t_p} \right],$$

c'est-à-dire,  $t$  devant être remplacé par l'unité,

$$f'_t = D \frac{\overline{MM_1} \dots \overline{MM_p}}{\overline{OM_1} \dots \overline{OM_p}} \left( \frac{\overline{OM_1}}{\overline{MM_1}} + \dots + \frac{\overline{OM_p}}{\overline{MM_p}} \right).$$

Si en particulier, le point  $M$  est situé sur la surface, en  $M_1$  par exemple, l'expression se réduit à

$$D \frac{\overline{MM_2}}{\overline{OM_2}} \dots \frac{\overline{MM_p}}{\overline{OM_p}}.$$

10. — Considérons maintenant une surface rapportée, en coordonnées homogènes barycentriques, à un tétraèdre  $ABCD$  de référence, et soit

$$f(x, y, z, t) = Ax^p + \dots = 0$$

son équation, ordonnée par rapport aux puissances de la coordonnée  $x$ . Si  $p = n$  (l'ordre de la surface),  $A$  sera un coefficient numérique. Si  $p < n$ ,  $A$  sera une fonction des trois autres coordonnées. En tous cas, l'équation en  $x$  aura  $p$  racines, c'est-à-dire que le premier membre pourra s'écrire

$$A(x - x_1) \dots (x - x_p).$$

Appelons  $x, y, z, t$  les coordonnées d'un point  $M$ , et  $M_1, M_2, \dots$  les points où  $\overline{AM}$  perce la surface. Supposons enfin que  $x + y + z + t = 1$ . Nous pouvons représenter par  $(x_1, y, z, t), \dots$  les coordonnées des points  $M_1, \dots$  et il est évident que ces points sont au nombre de  $p$ , et que les valeurs  $x_1, \dots, x_p$  sont précisément les mêmes que les racines de l'équation en  $x$ , considérées ci-dessus. Exactement comme au n° 7, nous voyons aussi que pour un point  $M_i$  quelconque, nous avons

$$x - x_i = 1 - \frac{\overline{AM}}{\overline{AM}_i} = \frac{\overline{MM}_i}{\overline{AM}_i}.$$

Le premier membre de l'équation de la surface a donc pour expression géométrique

$$f = A \frac{\overline{MM_1} \dots \overline{MM_p}}{\overline{AM_1} \dots \overline{AM_p}},$$

et, exactement comme dans ce qui précède, nous avons aussi

$$f'_x = A \frac{\overline{MM_1} \dots \overline{MM_p}}{\overline{AM_1} \dots \overline{AM_p}} \left( \frac{\overline{AM_1}}{\overline{MM_p}} + \dots + \frac{\overline{AM_p}}{\overline{MM_p}} \right).$$

La quantité entre crochets peut encore s'écrire

$$p - \frac{\overline{MA}}{\overline{MM_1}} - \dots - \frac{\overline{MA}}{\overline{MM_p}},$$

ou

$$p \left( 1 - \frac{\overline{MA}}{\overline{MH'_a}} \right) = p \frac{\overline{AH'_a}}{\overline{MH'_a}},$$

si  $H'_a$  est le centre harmonique des points  $M_1, \dots, M_p$ , par rapport au point  $M$ .

Nous obtenons donc, en définitive, pour l'expression de  $f'_x$ ,

$$Ap \frac{\overline{MM_1} \dots \overline{MM_p}}{\overline{AM_1} \dots \overline{AM_p}} \frac{\overline{H'_a A}}{\overline{H'_a M}}.$$

11. — En nous reportant aux résultats du n° 8, nous voyons que si, par rapport à un point quelconque  $M (x, y, z)$ , le centre harmonique des points où une parallèle menée par  $M$  à  $Ox$  perce la surface est à l'infini, on a

$$f'_x (x, y, z) = 0.$$

Cette conclusion est encore vraie si on l'étend à tous les points de rencontre, et non plus seulement aux points considérés, car les termes  $\frac{1}{\overline{MM_i}}$  qu'on introduirait seraient nuls, dès lors que le point  $M_i$  s'éloignerait à l'infini.

Supposons qu'il en soit de même pour  $f'_y (x, y, z)$  et  $f'_z (x, y, z)$ ; et sans changer les directions des axes coordonnés, prenons le point  $M$  pour origine.

L'équation de la surface dans ce système ne contiendra évidemment plus les termes du premier degré en  $x, y, z$ . Si nous cherchons alors les points d'intersection de la surface avec une droite de direction quelconque  $(\alpha, \beta, \gamma)$  issue de l'origine, nous obtiendrons une équation de la forme.

$$\rho^n (A\alpha^n + \dots) + \dots + \rho^2 (K\alpha^2 + \dots) + D = 0.$$

En appelant  $\rho_1, \dots, \rho_n$  les racines de cette équation, on a

$$\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} + \dots + \frac{1}{\rho_n} = 0.$$

Donc, si le centre harmonique des points de rencontre par rapport à  $M$  est à l'infini dans trois directions distinctes, il en est de même pour toute droite passant par  $M$ . On peut dire d'un tel point que c'est un *centre harmonique* de la surface.

Comme les coordonnées du point  $M$  sont données par les équations  $f'_x = 0, f'_y = 0, f'_z = 0$ , qui représentent en général des surfaces d'ordre  $n - 1$ , il s'ensuit qu'une surface du  $n^e$  ordre possède  $(n - 1)^3$  centres harmoniques. Chacune des surfaces  $f'_x = 0, \dots$  peut être considérée comme une surface diamétrale harmonique, en appelant ainsi le lieu des points jouissant de la propriété indiquée, pour un système de droites parallèles à une direction donnée.

En admettant que l'équation  $f = 0$  soit complète, il est visible que le lieu des centres des moyennes distances des points d'intersection de la surface par des cordes parallèles à  $Ox$  est un plan,  $f_{xp-1}^{(p-1)} = 0$ ; mais, s'il en est ainsi pour les trois directions d'axes  $Ox, Oy, Oz$ , il ne s'ensuit plus que la même propriété subsiste pour une autre direction; on le reconnaît sans aucune peine en examinant l'équation de la surface dans cette hypothèse.

La véritable généralisation de la théorie des plans diamétraux et des centres se trouve donc plutôt dans la considération des centres harmoniques dont nous venons de parler, et qui pourrait mériter une étude à part.

Nous ferons remarquer en terminant que les centres harmoniques coïncident exactement dans les quadriques avec les centres dans le sens ordinaire du mot, parce que de  $\frac{1}{M_1 M} + \frac{1}{M_2 M} = 0$ , on tire  $M_1 M + M_2 M = 0$ ; ce qui cesse d'être vrai lorsqu'il y a plus de deux points d'intersection.

C.-A. LAISANT.