La notion de surface unilatère fermée.

Golfe Juan, août 1901.

..... Dans l'intéressant article sur le regretté M. Brunel, il est un point sur lequel je prends la liberté d'attirer votre attention. C'est le passage où il est question de surfaces unilatères *fermées*. Ceux qui ne sont pas tout à fait au courant des théories relatives à l'Analysis situs pourraient croire que par ce mot l'on entend des surfaces *renfermant* un espace comme la surface de la sphère, par exemple. Il n'en est rien. Par surface fermée on entend toujours une surface *qui n'a pas de contour, de frontière*; et ce n'est que dans ce sens qu'il peut exister des surfaces unilatères fermées. Une surface unilatère n'a ni envers ni endroit, ni extérieur ni intérieur; elle ne peut enclore un espace et ne peut partager celui-ci en deux parties telles que l'on ne puisse se rendre de l'une à l'autre sans traverser la surface. De plus, elle a nécessairement au moins une ligne double où se croisent ses nappes; elle peut aussi avoir d'autres singularités comme des points cuspidaux, etc., etc. Au point de vue de l'Analysis situs, l'on doit se figurer une ligne double d'une surface unilatère fermée, exactement comme l'on se figure une ligne de passage (Uebergangslinie) d'une surface de Riemann. L'on peut alors, sans quitter la surface, la parcourir tout entière d'une manière continue et revenir au point de départ en ayant passé deux fois par chaque point de la surface. M. Klein, dans son célèbre cours sur la Géométrie non euclidienne, donne un exemple d'une surface unilatère fermée que peut réaliser tout bicycliste avec un morceau de chambre à air

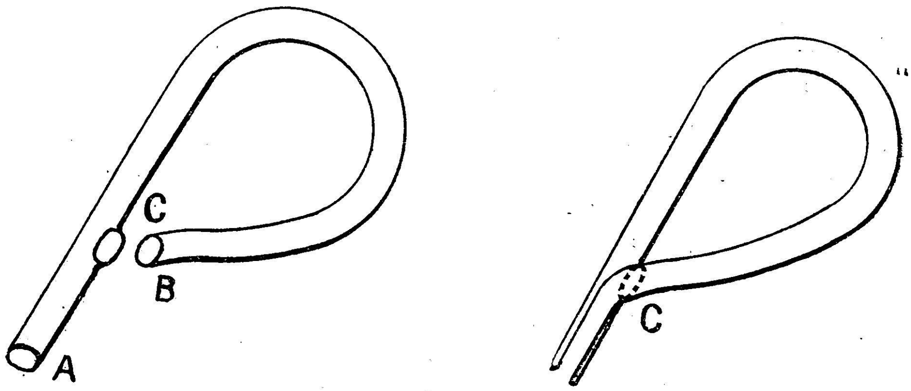

Fig. 1. Fig. 2.

et de la dissolution. Dans un tuyau de caoutchouc AB, pratiquez une ouverture C; faites passer B à l'intérieur du tuyau et collez ensemble les bords de A et B. Vous aurez ainsi réalisé une surface unilatère fermée, mais il faut regarder le bord du trou C comme une ligne double, sinon la surface cesserait d'être fermée, car elle aurait un contour qui serait le bord du trou C. Toutes ces questions ont été élucidées dans les mémoires classiques de M. DYCK sur l'Analysis situs, *Math. Annalen* (t. XXXII et XXXVII); l'on trouvera dans le tome XXXII une bibliographie des plus complètes sur tout ce qui a trait à l'Analysis situs. Si les surfaces unilatères ont échappé si longtemps à l'attention des géomètres, c'est que l'esprit n'en a pas naturellement l'intuition et que, dès l'enfance, on est habitué à se figurer les surfaces comme limites de corps solides. Les surfaces auxquelles on a à faire dans l'usage ordinaire de la vie sont, pour ainsi dire, sans aucune exception, de telles surfaces et par suite bilatères. Je saisis cette occasion pour attirer votre attention sur une note de M. STÄCKEL : *Die Entdeckung der einseitigen Flächen* (*Math. Annalen*, t. LII, p. 598). L'éminent géomètre y démontre, avec preuves à l'appui, que le premier exemple d'une surface unilatère, le ruban replié bien connu, n'est pas dû à Möbuis, mais à Listing qui en a même donné le dessin dans son travail : *Census räumlicher Complexe*, publié en 1862, c'est-à-dire trois ans avant le mémoire de Möbuis sur les Polyèdres, qui ne parut qu'en 1865.

Veuillez, etc. L. LAUGEL.

A propos d'un article sur le Postulatum des Parallèles.

Bordeaux, août 1901.

L'article de M. WICKERSHEIMER sur le *Postulatum des Parallèles* (*L'Enseignement mathématique*, 15 juillet 1901) appelle manifestement quelques observations (1). Pour les comprendre, qu'on veuille bien se reporter aux pages 281 et 282 du numéro cité. L'auteur pose ce lemme évident : ABC étant un triangle, et λ un rapport déterminé, il existe un triangle déterminé et unique $A'B'C'$ dont les côtés ont pour mesures λ AB, λ AC, λ BC. Ensuite dans le théorème I, ayant pris sur AB et AC, $AB' = \lambda\, AB$ et $AC' = \lambda\, AC$, l'auteur joint B' et C' et affirme sans autre explication que d'après son lemme *on aura nécessairement* $B'C' = \lambda\, BC$.

C'est une conclusion que pour notre part nous nous refusons entièrement à admettre, car le lemme n'y conduit nullement ; sans cela, rien n'empêcherait de l'appliquer dans les mêmes termes aux trièdes et aux triangles sphériques, en imposant à λ une certaine limite supérieure. Elle ne devient acceptable que si l'on admet au préalable l'existence des parallèles, c'est-à-dire à la faveur d'un cercle vicieux.

P. BARBARIN.

(1) *Une communication dans le même sens nous a été faite par* M. C. CAILLER (*Genève*), *et nous nous empressons d'ajouter que nous sommes entièrement d'accord avec nos correspondants.* L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE *étant une tribune ouverte à tous les mathématiciens, ainsi que nous l'avons déclaré à plusieurs reprises, ces discussions, forcément courtoises, permettent de mettre en lumière les écueils à éviter et ne peuvent que contribuer aux progrès de la science.* LA RÉDACTION.