

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 3 (1901)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Rubrik: CORRESPONDANCE

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 05.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

CORRESPONDANCE

Bruxelles, le 15 juin 1901.

Monsieur,

J'ai l'honneur de vous adresser deux exemplaires d'une brochure que je viens de faire paraître *sur l'enseignement de l'Analyse infinitésimale*.

Bien que ce travail ait été suscité par des questions personnelles et qu'il se rapporte directement aux institutions belges, son objet essentiel est un problème pédagogique d'intérêt général qui peut se réduire à la proposition que voici :

« En admettant qu'on définisse la différentielle d'après Cauchy, il convient d'enseigner d'abord le calcul des dérivées avec ses applications classiques à l'algèbre et à la géométrie ; puis le calcul intégral ; enfin, le calcul des différentielles. »

Depuis bientôt deux ans, cet ordre est suivi à l'Ecole militaire de Bruxelles (section de l'artillerie et du génie) et les résultats obtenus par les élèves à leurs examens, devant un jury étranger au corps professoral de l'établissement, ont accusé un progrès sensible. L'expérience se poursuit et permettra d'établir des comparaisons probantes. Mais, pour ma part, je n'ai pas le moindre doute sur le succès d'une entreprise qui m'a toujours paru conseillée par les raisons les plus fortes. La France a d'ailleurs montré le chemin, puisque, dans ce grand pays des sciences, on étudie les dérivées des fonctions en Algèbre, avant d'aborder le Calcul différentiel.

Ma brochure parle assez longuement de la différentielle totale d'une fonction à plusieurs variables indépendantes ; à première vue, la définition de Cauchy semble ne pas s'appliquer à cette espèce de différentielle, celle-ci ne paraissant pas résulter d'une dérivée. Je crois avoir expliqué cette anomalie et montré qu'elle ne peut exister réellement que si l'on conçoit la variable indépendante de deux manières différentes, réservant la manière la plus générale au calcul des dérivées et la moins générale au calcul des différentielles.

Veuillez agréer, Monsieur, l'assurance de ma considération la plus distinguée.

G. LEMAN.

NOTE DE LA RÉDACTION. — *Tout en accueillant très volontiers la lettre du colonel Lemán, nous tenons à faire les plus expresses réserves*

sur le fond même de la question. Du reste les avis des mathématiciens et des professeurs sont partagés, et l'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE ne manquera pas, à l'occasion, d'enregistrer les opinions et les arguments opposés, sur ce point d'une extrême importance pédagogique.

NOTE DE LA RÉDACTION.

Santiago (Chili), 18 mai 1901.

Messieurs,

Je prends la liberté de répondre à quelques questions de M. Brocard, insérées dans les numéros 1 (p. 60) et 2 (p. 129-130) de l'année courante.

1. — Pour ce qui est de la variation de la fonction

$$y = \frac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'}$$

je me suis posé la même question que M. Brocard, en examinant, il y a une dizaine d'années, les *Nociones de Algebra elemental* d'Abel Izquierdo, alors en usage dans les établissements secondaires du Chili. Je ne vois pas non plus l'utilité que peut présenter ce problème, aussi ne l'ai-je pas introduit dans le programme d'Algèbre. En Allemagne, dont je suis originaire et où j'ai fait mes études, je n'ai pas eu l'occasion de voir ce problème et je ne crois pas qu'il y soit examiné au Gymnase ou à l'Université.

2. — A cette même époque on trouvait ici, dans les manuels d'*Aritmetica* et d'*Algebra*, l'ancienne notation des proportions $A : B :: C : D$, qui, selon Cantor, *Vorles*, ch. LXXI, a été introduite (1631) par Oughtred (ce dernier écrit même $A.B :: C.D$). Il m'a coûté beaucoup de peine pour faire remplacer les quatre points par le signe $=$. Aujourd'hui encore on voit les élèves de quelques écoles privées faire usage de ce symbole inutile, qui a le grave inconvénient de leur faire croire qu'une proportion et un égalité entre deux rapports sont choses différentes.

3. — Quant à la question « L'enseignement de l'Astronomie est-il complètement libre ? » M. le professeur R. Wolf (Zurich) dit dans son *Handbuch der Astronomie* (n° 261, Anmerk. m, zweiter Halbband) que l'interdiction d'enseigner la théorie de Copernic a été levée officiellement en 1821.

Je saisis cette occasion pour vous soumettre quelques remarques. (voir plus bas, *Questions et remarques diverses*, nos 5 à 9, *Réd.*) que j'ai faites à propos des manuels publiés au Chili, remarques qui, en grande partie, peuvent aussi s'adresser aux ouvrages publiés en langue française.

Dr Aug. TAFELMACHER.

La notion de surface unilatère fermée.

Golfe Juan, août 1901.

..... Dans l'intéressant article sur le regretté M. Brunel, il est un point sur lequel je prends la liberté d'attirer votre attention. C'est le passage où il est question de surfaces unilatères *fermées*. Ceux qui ne sont pas tout à fait au courant des théories relatives à l'Analysis situs pourraient croire que par ce mot l'on entend des surfaces *renfermant* un espace comme la surface de la sphère, par exemple. Il n'en est rien. Par surface fermée on entend toujours une surface *qui n'a pas de contour, de frontière* ; et ce n'est que dans ce sens qu'il peut exister des surfaces unilatères fermées. Une surface unilatère n'a ni envers ni endroit, ni extérieur ni intérieur ; elle ne peut enclore un espace et ne peut partager celui-ci en deux parties telles que l'on ne puisse se rendre de l'une à l'autre sans traverser la surface. De plus, elle a nécessairement au moins une ligne double où se croisent ses nappes ; elle peut aussi avoir d'autres singularités comme des points cuspidaux, etc., etc. Au point de vue de l'Analysis situs, l'on doit se figurer une ligne double d'une surface unilatère fermée, exactement comme l'on se figure une ligne de passage (Uebergangslinie) d'une surface de Riemann. L'on peut alors, sans quitter la surface, la parcourir tout entière d'une manière continue et revenir au point de départ en ayant passé deux fois par chaque point de la surface. M. KLEIN, dans son célèbre cours sur la Géométrie non euclidienne, donne un exemple d'une surface unilatère fermée que peut réaliser tout bicycliste avec un morceau de chambre à air

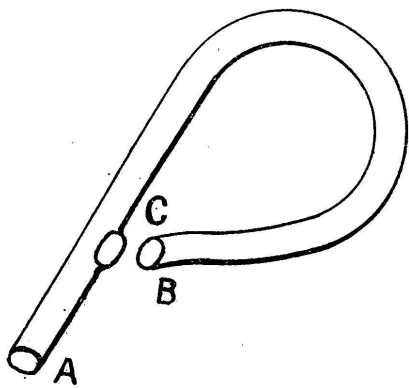


Fig. 1.

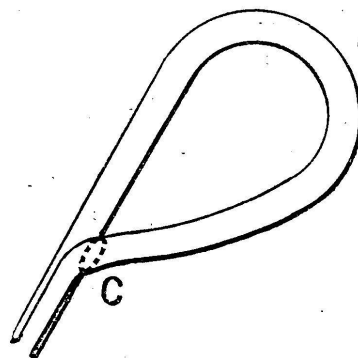


Fig. 2.

et de la dissolution. Dans un tuyau de caoutchouc AB, pratiquez une ouverture C ; faites passer B à l'intérieur du tuyau et collez ensemble les bords de A et B. Vous aurez ainsi réalisé une surface unilatère fermée, mais il faut regarder le bord du trou C comme une ligne double, sinon la surface cesserait d'être fermée, car elle aurait un contour qui serait le bord du trou C. Toutes ces questions ont été élucidées dans

les mémoires classiques de M. DYCK sur l'Analysis situs, *Math. Annalen* (t. XXXII et XXXVII); l'on trouvera dans le tome XXXII une bibliographie des plus complètes sur tout ce qui a trait à l'Analysis situs. Si les surfaces unilatères ont échappé si longtemps à l'attention des géomètres, c'est que l'esprit n'en a pas naturellement l'intuition et que, dès l'enfance, on est habitué à se figurer les surfaces comme limites de corps solides. Les surfaces auxquelles on a à faire dans l'usage ordinaire de la vie sont, pour ainsi dire, sans aucune exception, de telles surfaces et par suite bilatères. Je saisis cette occasion pour attirer votre attention sur une note de M. STÄCKEL : *Die Entdeckung der einseitigen Flächen* (*Math. Annalen*, t. LII, p. 598). L'éminent géomètre y démontre, avec preuves à l'appui, que le premier exemple d'une surface unilatère, le ruban replié bien connu, n'est pas dû à Möbuis, mais à Listing qui en a même donné le dessin dans son travail : *Census räumlicher Complexe*, publié en 1862, c'est-à-dire trois ans avant le mémoire de Möbuis sur les Polyèdres, qui ne parut qu'en 1865.

Veuillez, etc.

L. LAUGEL.

A propos d'un article sur le Postulatum des Parallèles.

Bordeaux, août 1901.

L'article de M. WICKERSHEIMER sur le *Postulatum des Parallèles* (*L'Enseignement mathématique*, 15 juillet 1901) appelle manifestement quelques observations ⁽¹⁾. Pour les comprendre, qu'on veuille bien se reporter aux pages 281 et 282 du numéro cité. L'auteur pose ce lemme évident : ABC étant un triangle, et λ un rapport déterminé, il existe un triangle déterminé et unique A'B'C' dont les côtés ont pour mesures λAB , λAC , λBC . Ensuite dans le théorème I, ayant pris sur AB et AC, $AB' = \lambda AB$ et $AC' = \lambda AC$, l'auteur joint B' et C' et affirme sans autre explication que d'après son lemme on aura nécessairement $B'C' = \lambda BC$.

C'est une conclusion que pour notre part nous nous refusons entièrement à admettre, car le lemme n'y conduit nullement; sans cela, rien n'empêcherait de l'appliquer dans les mêmes termes aux trièdres et aux triangles sphériques, en imposant à λ une certaine limite supérieure. Elle ne devient acceptable que si l'on admet au préalable l'existence des parallèles, c'est-à-dire à la faveur d'un cercle vicieux.

P. BARBARIN.

(1) Une communication dans le même sens nous a été faite par M. C. CAILLER (Genève), et nous nous empressons d'ajouter que nous sommes entièrement d'accord avec nos correspondants. L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE étant une tribune ouverte à tous les mathématiciens, ainsi que nous l'avons déclaré à plusieurs reprises, ces discussions, forcément courtoises, permettent de mettre en lumière les écueils à éviter et ne peuvent que contribuer aux progrès de la science. LA RÉDACTION.

Questions et remarques diverses.

5. — Des *lignes* trigonométriques. — Les auteurs allemands désignent les rapports sinus, cosinus, etc., sous le nom de *fonctions* de l'angle, et cette désignation me paraît seule acceptable. En effet le sinus d'un angle ou d'un arc est un *nombre* et non une *ligne* droite, ce qui est clair pour tout maître. L'expression de *ligne* peut donner lieu, chez l'élève, à une fausse représentation des fonctions trigonométriques ; elle n'est nullement justifiée par l'emploi de la circonférence de rayon *un* ; le sinus, par exemple, est simplement le nombre qui mesure la perpendiculaire, l'unité de mesure étant le rayon.

Pourquoi ne fait-on pas usage de la dénomination de fonction trigonométrique¹ ?

6. — Dans l'enseignement élémentaire les fonctions trigonométriques doivent être définies d'abord pour l'angle aigu à l'aide du triangle rectangle². De cette manière seule il est possible de rattacher la Trigonométrie d'une façon logique à la Géométrie en ayant recours à la similitude des triangles rectangles ayant un angle aigu égal. Ce n'est que plus tard qu'on fera l'extension aux angles quelconques en faisant usage du cercle de rayon *un* ; c'est à ce moment-là que l'on justifiera les dénominations adoptées pour les six fonctions.

7. — L'introduction à l'étude des *logarithmes* ne doit pas être basée sur la notion de progression, ainsi que cela se voit encore dans les anciens manuels. L'opération logarithmique doit être présentée comme une deuxième inversion de la puissance ; elle doit faire suite à l'étude des puissances et des racines ou, tout au moins, être définie à ce moment-là.

8. — Autrefois nous n'avions pas, au Chili, de dénomination spéciale pour l'égalité (la congruence) des figures en Géométrie. On employait simplement le mot *égalité* (igualdad). J'ignore quelle est la dénomination usitée à ce sujet par les auteurs français. Pourtant j'ai vu récemment, dans le *Programme des conditions d'admission à l'Ecole d'Archi-*

(¹) Nous avons déjà fait cette remarque à l'occasion d'un compte rendu bibliographique (*L'Ens. math.*, 2^e année, p. 221). Nous sommes heureux de la voir reprendre et présentée d'une façon plus explicite par M. Tafelmacher.

Certains auteurs parlent même de lignes trigonométriques *naturelles* ! (v. *Tables Dupuis*, à 5 décim.)

Si l'on craint, dans l'exposé des premiers éléments, de faire usage du mot de *fonction*, il est facile de se borner à la dénomination de *rapport* trigonométrique. H. Fehr.

(²) Voir à ce sujet la note *Sur l'enseignement des éléments de Trigonometrie*, *L'Ens. math.*, 1^{re} année, p. 45-49. — H. F.

lecture, le mot « égalité » employé dans ce sens. L'introduction dans la terminologie espagnole, du mot *congruente* m'a coûté beaucoup d'efforts. (Voir à cet effet mes *Elementos de Matematicas*, t. I, p. 6, note 3.)

9. — En *Trigonométrie sphérique* la résolution des cas où l'on donne les trois angles α, β, γ peut être effectuée de la manière suivante : si l'on désigne par σ la demi-somme $\frac{\alpha + \beta + \gamma}{2}$ et si l'on pose

$$\cot r = \sqrt{\frac{\cos(\sigma - \alpha) \cos(\sigma - \beta) \cos(\sigma - \gamma)}{-\cos \sigma}},$$

les côtés a, b, c , seront donnés par les expressions

$$\cot \frac{a}{2} = \frac{\cot r}{\cos(\sigma - \alpha)}, \quad \cot \frac{b}{2} = \frac{\cot r}{\cos(\sigma - \beta)}, \quad \cot \frac{c}{2} = \frac{\cot r}{\cos(\sigma - \gamma)},$$

et l'on montre facilement que r est le rayon sphérique de la circonférence circonscrite.

De cette manière on trouve des formules qui sont analogues à celles que l'on obtient lorsqu'on connaît les trois côtés, à savoir

$$\tan \rho = \sqrt{\frac{\sin(s - a) \sin(s - b) \sin(s - c)}{\sin s}},$$

$$\text{et } \tan \frac{\alpha}{2} = \frac{\tan \rho}{\sin(s - a)}, \text{ etc.,}$$

s étant la demi-somme $\frac{a + b + c}{2}$, et ρ désignant le rayon du cercle inscrit.

On peut obtenir l'expression de $\cot \frac{a}{2}$ à l'aide de $\tan \frac{\alpha}{2}$ en ayant recours au triangle polaire. Si l'on représente par $\alpha' b' \dots \gamma'$ les éléments du triangle polaire, on a

$$\tan \frac{\alpha'}{2} = \frac{1}{\sin(s' - a')} \sqrt{\frac{\sin(s' - a') \sin(s' - b') \sin(s' - c')}{\sin s'}};$$

pour

$$\frac{\alpha'}{2} = 90^\circ - \frac{a}{2}, \quad s' = 270^\circ - \sigma, \quad s' - a' = 90^\circ - (\sigma - \alpha), \quad \text{etc...},$$

on a

$$\cot \frac{a}{2} = \frac{1}{\cos(\sigma - \alpha)} \sqrt{\frac{\cos(\sigma - \alpha) \cos(\sigma - \beta) \cos(\sigma - \gamma)}{-\cos \sigma}}.$$

Cette dernière méthode est analogue à celle que l'on suit pour déduire le 2^e théorème des cosinus ($\cos \alpha = -\cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma \cos \alpha$) du premier ($\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha$). Il me semble qu'elle doit être préférée à celle que l'on rencontre ordinairement dans les manuels. Elle permet d'ailleurs de reconnaître facilement que le radical de $\cot \frac{a}{2}$ est positif, puisque, dans l'hypothèse qu'aucun des éléments du triangle sphérique n'est supérieur à 180° , on a

$$-\cos \sigma = \sin s' > 0, \quad \cos (\sigma - \alpha) = \sin (s' - a') > 0, \quad \text{etc...}$$

En outre on a

$$\tan \rho' = \cot r \quad \text{et} \quad \cot r' = \tan \rho;$$

ces rayons étant inférieurs à 90° , puisque l'on a

$$\frac{a}{2} < 90^\circ, \quad \frac{\alpha}{2} < 90^\circ, \quad \cos (\sigma - \alpha) = \sin (s' - a') > 0,$$

on peut donc énoncer le théorème :

Le rayon de la circonférence circonscrite à un triangle sphérique est le complément du rayon de la circonférence inscrite dans son triangle polaire, et réciproquement.

Aug. TAFELMACHER (Santiago, Chili).

10. — A quelle époque l'Académie des sciences de Paris a-t-elle introduit dans le règlement de ses comptes rendus l'article suivant :

« Un membre de l'Académie ne peut donner aux comptes rendus plus de cinquante pages par année ? »

Est-il vrai que cet article visait Cauchy que l'on trouvait trop productif et qui n'était pas encore apprécié ?

A. RAGOT.