Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 3 (1901)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: EXTENSION AUX COURBES GAUCHES ET AUX SURFACES DES NOTIONS « TANGENTE », « SOUS-TANGENTE » ETC.

Autor: Hatzidakis, N.-J.

Kapitel: II. Grandeurs polaires

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-4666

Les grandeurs correspondantes par rapport aux plans des yz et zx seront (permutation circulaire des $-p$, $-q$, 1).

$$\begin{cases} N'P' = x\sqrt{1+q^2}, \\ M'N' = x\dfrac{\sqrt{1+p^2+q^2}}{-p}, \end{cases} \qquad \begin{cases} N''P'' = y\sqrt{1+p^2}, \\ M''N'' = y\dfrac{\sqrt{1+p^2+q^2}}{-q}. \end{cases}$$

II. Grandeurs polaires

8. *Courbes gauches.* — Si l'on mène par le pôle O un plan P perpendiculaire au rayon vecteur, on appellera *sous-tangente* polaire le segment TO, entre le pôle O et l'intersection T de la tangente à la courbe avec le plan (P), et *tangente* polaire le segment MT ; de même si la normale principale et la binormale de la courbe coupant le plan (P) aux points N et B, NO et MN seront respectivement la *sous-normale principale* et la *normale principale polaires* BO et MB, la *sous-binormale* et la *binormale* polaires.

9. L'angle ω (OMT) du rayon vecteur avec la tangente sera

$$\cos\omega = \frac{xdx + ydy + zdz}{\rho ds} = \frac{d\rho}{ds},$$

d'où

$$\operatorname{tang}\omega = \frac{\sqrt{ds^2 - d\rho^2}}{d\rho} = \frac{\rho\sqrt{d\partial^2 + \sin^2\partial d\psi^2}}{d\rho};$$

on aura donc d'abord :

$$(9) \qquad TO = \rho\frac{\sqrt{ds^2 - d\rho^2}}{d\rho}, \qquad MT = \frac{\rho}{\cos\omega} = \frac{\rho ds}{d\rho}. \qquad (10)$$

10. L'angle φ (OMN) de la normale principale avec le rayon vecteur sera

$$\cos\varphi = \frac{(xx'' + yy'' + zz'')\,R}{\rho}, \qquad \operatorname{tang}\varphi = \frac{\sqrt{\rho^2 - R^2(\Sigma(xx''))^2}}{R.\Sigma(xx'')},$$

(R, rayon de courbure ; x'', y'', z'' dérivées secondes par rapport à la variable indépendante s).

Cette expression ne se transforme pas facilement en coordonnées polaires (à cause de R) ; il vaut donc mieux conserver l'expression *cartésienne de la sous-normale principale et de la normale principale polaires*, qui seront

$$\left\{\begin{aligned} &\mathrm{NO} = \rho \operatorname{tang} \varphi = \sqrt{\Sigma(x^2)} \sqrt{\frac{\Sigma(x^2)\,\Sigma(x''^2)}{(\Sigma(xx''))^2} - 1}, && (11) \\ &\mathrm{MN} = \frac{\rho}{\cos\varphi} = \frac{\Sigma(x^2)\sqrt{\Sigma(x''^2)}}{\Sigma xx''}. && (12) \end{aligned}\right.$$

11. De même, on aura

$$\begin{aligned} \cos\chi\,(\equiv \cos \mathrm{OMB}) &= \frac{x\lambda + y\mu + z\nu}{\rho} \\ &\equiv \frac{\mathrm{R}}{\rho} \sum_{x,\,y,\,z} [x\,(y'z'' - y''z')] + \operatorname{tang}\chi \\ &= \frac{\sqrt{\rho^2 - \mathrm{R}^2\,(\Sigma\,[x\,(y'z'' - y''z')])^2}}{\mathrm{R}.\Sigma\,[x\,(y'z'' - y''z')]}, \end{aligned}$$

expression qui, de même, ne se transforme pas élégamment en coordonnées polaires. On aura donc les expressions *cartésiennes des sous-binormale et binormale polaires :*

$$\left\{\begin{aligned} &\mathrm{BO} = \rho \operatorname{tang}\chi = \sqrt{\Sigma(x^2)} \sqrt{\frac{\Sigma(x^2).\,\Sigma(x''^2)}{\{\Sigma\,[x\,(y'z'' - y''z')]\}^2} - 1}, && (13) \\ &\mathrm{MB} = \frac{\rho}{\cos\chi} = \frac{\Sigma(x^2)\sqrt{\Sigma(x''^2)}}{\Sigma\,[x\,(y''z'' - y''z')]}. && (14) \end{aligned}\right.$$

12. Quant aux problèmes que l'on peut se proposer sur les grandeurs précédentes, il y aura en général de très difficiles à résoudre, mais en combinant adroitement les différentes grandeurs par rapport aux différents plans coordonnés, on pourra en trouver aussi de très faciles qui pourraient trouver place dans les livres d'enseignement.

N.-J. Hatzidakis (Athènes).