

Zeitschrift:	L'Enseignement Mathématique
Herausgeber:	Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band:	3 (1901)
Heft:	1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE
Artikel:	EXTENSION AUX COURBES GAUCHES ET AUX SURFACES DES NOTIONS « TANGENTE », « SOUS-TANGENTE » ETC.
Autor:	Hatzidakis, N.-J.
Kapitel:	II. Grandeurs polaires
DOI:	https://doi.org/10.5169/seals-4666

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 06.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Les grandeurs correspondantes par rapport aux plans des yz et zx seront (permutation circulaire des $-p$, $-q$, 1).

$$\left\{ \begin{array}{l} N'P' = x\sqrt{1+q^2}, \\ M'N' = x\frac{\sqrt{1+p^2+q^2}}{-p}, \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} N''P'' = y\sqrt{1+p^2}, \\ M''N'' = y\frac{\sqrt{1+p^2+q^2}}{-q}. \end{array} \right.$$

II. GRANDEURS POLAIRES

8. *Courbes gauches.* — Si l'on mène par le pôle O un plan P perpendiculaire au rayon vecteur, on appellera *sous-tangente polaire* le segment TO, entre le pôle O et l'intersection T de la tangente à la courbe avec le plan (P), et *tangente polaire* le segment MT ; de même si la normale principale et la binormale de la courbe coupant le plan (P) aux points N et B, NO et MN seront respectivement la *sous-normale principale* et la *normale principale polaires* BO et MB, la *sous-binormale* et la *binormale polaires*.

9. L'angle ω (OMT) du rayon vecteur avec la tangente sera

$$\cos \omega = \frac{xdx + ydy + zdz}{\rho ds} = \frac{d\rho}{ds},$$

d'où

$$\tang \omega = \frac{\sqrt{ds^2 - d\rho^2}}{d\rho} = \frac{\rho \sqrt{d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\psi^2}}{d\rho};$$

on aura donc d'abord :

$$(9) \quad \text{TO} = \rho \frac{\sqrt{ds^2 - d\rho^2}}{d\rho}, \quad \text{MT} = \frac{\rho}{\cos \omega} = \frac{\rho ds}{d\rho}. \quad (10)$$

10. L'angle φ (OMN) de la normale principale avec le rayon vecteur sera

$$\cos \varphi = \frac{(xx'' + yy'' + zz'') R}{\rho}, \quad \tang \varphi = \frac{\sqrt{\rho^2 - R^2 (\Sigma (xx'')^2)}}{R \cdot \Sigma (xx'')},$$

(R, rayon de courbure ; x'', y'', z'' dérivées secondes par rapport à la variable indépendante s).

Cette expression ne se transforme pas facilement en coordonnées polaires (à cause de R) ; il vaut donc mieux conserver l'ex-

pression cartésienne de la sous-normale principale et de la normale principale polaires, qui seront

$$\left\{ \begin{array}{l} NO = \rho \tan \varphi = \sqrt{\Sigma(x^2)} \sqrt{\frac{\Sigma(x^2) \Sigma(x'^2)}{(\Sigma(xx'))^2}} - 1, \end{array} \right. \quad (11)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} MN = \frac{\rho}{\cos \varphi} = \frac{\Sigma(x^2) \sqrt{\Sigma(x'^2)}}{\Sigma xx'} . \end{array} \right. \quad (12)$$

11. De même, on aura

$$\begin{aligned} \cos \chi (\equiv \cos OMB) &= \frac{x\lambda + y\mu + z\nu}{\rho} \\ &\equiv \frac{R}{\rho} \sum_{x, y, z} [x(y'z'' - y''z')] + \tan \chi \\ &= \frac{\sqrt{\rho^2 - R^2 (\Sigma[x(y'z'' - y''z')])^2}}{R \cdot \Sigma[x(y'z'' - y''z')]} , \end{aligned}$$

expression qui, de même, ne se transforme pas élégamment en coordonnées polaires. On aura donc les expressions cartésiennes des sous-binormale et binormale polaires :

$$\left\{ \begin{array}{l} BO = \rho \tan \chi = \sqrt{\Sigma(x^2)} \sqrt{\frac{\Sigma(x^2) \cdot \Sigma(x'^2)}{\{\Sigma[x(y'z'' - y''z')]\}^2}} - 1, \end{array} \right. \quad (13)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} MB = \frac{\rho}{\cos \chi} = \frac{\Sigma(x^2) \sqrt{\Sigma(x'^2)}}{\Sigma[x(y'z'' - y''z')]} . \end{array} \right. \quad (14)$$

12. Quant aux problèmes que l'on peut se proposer sur les grandeurs précédentes, il y aura en général de très difficiles à résoudre, mais en combinant adroitemment les différentes grandeurs par rapport aux différents plans coordonnés, on pourra en trouver aussi de très faciles qui pourraient trouver place dans les livres d'enseignement.

N.-J. HATZIDAKIS (Athènes).