I. Grandeurs cartésiennes

A. *Extension aux courbes gauches.*

4. On appellera dans une courbe gauche (ou, plus généralement, dans une courbe dans l'espace), *sous-tangente* de la courbe en un point M le segment TP compris entre le pied P de la coordonnée z et le point T où la tangente en M à la courbe coupe le plan des yx (ou des yz ou des zx). La *tangente* sera le segment MT, entre T et le point de contact M. Cela posé, on aura, du triangle rectangle MPT,

$$\text{(1)} \qquad \mathrm{TP} = z \operatorname{tang} \mathrm{TMP} = z\,\frac{\sqrt{1-\gamma^2}}{\gamma} = \frac{z\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{\gamma},$$

ou, si l'on remplace les cosinus de la tangente par leurs valeurs,

$$\text{(1')} \qquad \mathrm{TP} = z\sqrt{\left(\frac{dx}{dz}\right)^2+\left(\frac{dy}{dz}\right)^2}.$$

On aura de même

$$\text{(2)} \qquad \mathrm{MT} = z\,\frac{1}{\cos \mathrm{TMP}} = \frac{z}{\gamma},$$

ou bien

$$\text{(2')} \qquad \mathrm{MT} = z\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dz}\right)^2+\left(\frac{dy}{dz}\right)^2}.$$

L'on peut aussi trouver les égalités (1') et (2') directement, à l'aide des coordonnées des points

$$\mathrm{P}(x, y, 0) \quad \text{et} \quad \mathrm{T}\left(\mathrm{X} = x - \frac{dx}{dz}z, \quad \mathrm{Y} = y - \frac{dy}{dz}z, \quad \mathrm{Z} = 0\right);$$

on voit ainsi que *l'expression de la sous-tangente restera la même en coordonnées obliques*, comme pour les courbes planes. Les *sous-tangentes* et *tangentes* par rapport aux plans des yz et zx seront évidemment

$$\mathrm{T'P'} = x\,\frac{\sqrt{\beta^2+\gamma^2}}{\alpha}, \quad \mathrm{T''P''} = x\,\frac{\sqrt{\gamma^2+\alpha^2}}{\beta};$$

$$\mathrm{M'T'} = \frac{x}{\alpha}, \quad \mathrm{M''T''} = \frac{y}{\beta}.$$

5. On appellera *sous-normale principale* en M le segment NP compris entre le point P et le point d'intersection N de la normale principale avec le plan des xy. La *normale principale* sera le segment MN.

On aura donc, du triangle rectangle MPN,

$$\text{(3)} \qquad \mathrm{NP} = z \operatorname{tang} \mathrm{NMP} = z \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta} \equiv z \frac{\sqrt{\xi^2+\eta^2}}{\zeta},$$

ou bien, en remplaçant ξ, η, ζ par leurs valeurs,

$$\text{(3')} \qquad \mathrm{NP} = z \frac{\sqrt{x''^2+y''^2}}{z''}$$

(s étant la variable indépendante et les accents désignant les dérivées par rapport à s).

On a de même

$$\text{(4)} \qquad \mathrm{MN} = \frac{z}{\cos \mathrm{NMP}} = \frac{z}{\zeta},$$

ou bien

$$\text{(4')} \qquad \mathrm{MN} = z \frac{\sqrt{x''^2+y''^2+z''^2}}{z''}.$$

On peut aussi déduire les formules (3') et (4') directement des coordonnées des points P (x, y, o) et N $\left(x - \frac{x''}{z''} z,\ y - \frac{y''}{z''} z,\ 0\right)$.

Les grandeurs NP, MN se rapportent au plan des xy, celles rapportées aux plans des yz et zx seront respectivement :

$$\left\{\begin{aligned} \mathrm{N'P'} &= x \frac{\sqrt{\eta^2+\zeta^2}}{\xi}, & \mathrm{N''P''} &= y \frac{\sqrt{\zeta^2+\xi^2}}{\eta}; \\ \mathrm{M'N'} &= \frac{x}{\xi}, & \mathrm{M''N''} &= \frac{y}{\eta}. \end{aligned}\right.$$

6. Enfin, si l'on appelle *sous-binormale* le segment BP, entre le point P et l'intersection B de la binormale avec le plan des xy et *binormale* le segment MB, on aura de même

$$\text{(5)} \qquad \mathrm{BP} = z \operatorname{tang} \mathrm{BMP} = z \frac{\sqrt{1-\nu^2}}{\nu} \equiv z \frac{\sqrt{\lambda^2+\mu^2}}{\nu},$$

ou bien

$$\text{(5')} \qquad \mathrm{BP} = z \frac{\sqrt{(y'z''-y''z')^2+(z'x''-z''x')^2}}{x'y''-x''y'},$$

$$\text{(5'')} \qquad \equiv z \frac{\sqrt{(x''^2+y''^2+z''^2)^2-(x'y''-x''y')^2}}{x'y''-x''y'},$$

et

$$\text{(6)} \qquad \mathrm{MB} = \frac{z}{\cos \mathrm{BMP}} = \frac{z}{\nu},$$

ou bien

$$\text{(6')} \qquad \mathrm{MB} = z \frac{\sqrt{(x'y''-x''y')^2+(y'z''-y''z')^2+(z'x''-z''x')^2}}{x'y''-x''y'},$$

$$\text{(6'')} \qquad = z \frac{\sqrt{x''^2+y''^2+z''^2}}{x'y''-x''y'}.$$

On pourra, comme auparavant, trouver aussi directement les formules (5′) et (6′), des coordonnées des points P (x, y, o) et B $\left(x - z, \frac{y'z''-y''z'}{x'y''-x''y'}\ y - z, \frac{z'x''-z''x'}{x'y''-x'y''}, \mathrm{o}\right)$.

Les grandeurs correspondantes B′P′, M′B′ et B″P″, M″B″, par rapport aux plans des yz et zx seront évidemment

$$\begin{cases} \mathrm{B'P'} = \dfrac{x\sqrt{\mu^2+\nu^2}}{\lambda}, & \mathrm{M'B'} = \dfrac{x}{\lambda}; \\ \mathrm{B''P''} = \dfrac{y\sqrt{\nu^2+\lambda^2}}{\mu}, & \mathrm{M''B''} = \dfrac{y}{\mu}. \end{cases}$$

B. *Extension aux surfaces* $[z = f(x, y)]$.

7. On appellera *sous-normale* d'une surface en un point M le segment NP compris entre le pied P de la coordonnée z sur le plan des xy et l'intersection N de la normale à la surface avec le plan des xy. La *normale* sera le segment correspondant MN du point de contact M à N. L'on pourrait considérer par rapport aux deux tangentes aux lignes de courbure de la surface (ou aux tangentes aux lignes asymptotiques des surfaces à courbures opposées), des quantités analogues que l'on nommerait *sous-tangentes* et *tangentes* ; mais leur expression analytique étant très compliquée, nous l'omettons, en nous bornant seulement à la *sous-normale* et la *normale*.

Du triangle rectangle MPN, on a

$$\text{(7)} \qquad \mathrm{NP} = z \operatorname{tang} \mathrm{NMP} = z\sqrt{p^2+q^2},$$

et

$$\text{(8)} \qquad \mathrm{MN} = \frac{z}{\cos \mathrm{NMP}} = z\sqrt{1+p^2+q^2}.$$

Les grandeurs correspondantes par rapport aux plans des yz et zx seront (permutation circulaire des $-p$, $-q$, 1).

$$\begin{cases} N'P' = x\sqrt{1+q^2}, \\ M'N' = x\dfrac{\sqrt{1+p^2+q^2}}{-p}, \end{cases} \qquad \begin{cases} N''P'' = y\sqrt{1+p^2}, \\ M''N'' = y\dfrac{\sqrt{1+p^2+q^2}}{-q}. \end{cases}$$

II. Grandeurs polaires

8. *Courbes gauches.* — Si l'on mène par le pôle O un plan P perpendiculaire au rayon vecteur, on appellera *sous-tangente* polaire le segment TO, entre le pôle O et l'intersection T de la tangente à la courbe avec le plan (P), et *tangente* polaire le segment MT ; de même si la normale principale et la binormale de la courbe coupant le plan (P) aux points N et B, NO et MN seront respectivement la *sous-normale principale* et la *normale principale polaires* BO et MB, la *sous-binormale* et la *binormale* polaires.

9. L'angle ω (OMT) du rayon vecteur avec la tangente sera

$$\cos\omega = \frac{xdx + ydy + zdz}{\rho ds} = \frac{d\rho}{ds},$$

d'où

$$\operatorname{tang}\omega = \frac{\sqrt{ds^2 - d\rho^2}}{d\rho} = \frac{\rho\sqrt{d\partial^2 + \sin^2\partial d\psi^2}}{d\rho};$$

on aura donc d'abord :

$$(9) \qquad TO = \rho\frac{\sqrt{ds^2 - d\rho^2}}{d\rho}, \qquad MT = \frac{\rho}{\cos\omega} = \frac{\rho ds}{d\rho}. \qquad (10)$$

10. L'angle φ (OMN) de la normale principale avec le rayon vecteur sera

$$\cos\varphi = \frac{(xx'' + yy'' + zz'')\,R}{\rho}, \qquad \operatorname{tang}\varphi = \frac{\sqrt{\rho^2 - R^2(\Sigma(xx''))^2}}{R.\Sigma(xx'')},$$

(R, rayon de courbure ; x'', y'', z'' dérivées secondes par rapport à la variable indépendante s).

Cette expression ne se transforme pas facilement en coordonnées polaires (à cause de R) ; il vaut donc mieux conserver l'ex-