

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 3 (1901)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** EXTENSION AUX COURBES GAUCHES ET AUX SURFACES DES NOTIONS « TANGENTE », « SOUS-TANGENTE » ETC.  
**Autor:** Hatzidakis, N.-J.  
**Kapitel:** I. Grandeurs cartésiennes  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-4666>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 26.04.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## I. GRANDEURS CARTÉSIENNES

## A. Extension aux courbes gauches.

4. On appellera dans une courbe gauche (ou, plus généralement, dans une courbe dans l'espace), *sous-tangente* de la courbe en un point M le segment TP compris entre le pied P de la coordonnée  $z$  et le point T où la tangente en M à la courbe coupe le plan des  $yx$  (ou des  $yz$  ou des  $zx$ ). La *tangente* sera le segment MT, entre T et le point de contact M. Cela posé, on aura, du triangle rectangle MPT,

$$(1) \quad TP = z \operatorname{tang} \text{TMP} = z \frac{\sqrt{1 - \gamma^2}}{\gamma} = \frac{z \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{\gamma},$$

ou, si l'on remplace les cosinus de la tangente par leurs valeurs,

$$(1') \quad TP = z \sqrt{\left(\frac{dx}{dz}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dz}\right)^2}.$$

On aura de même

$$(2) \quad MT = z \frac{1}{\cos \text{TMP}} = \frac{z}{\gamma},$$

ou bien

$$(2') \quad MT = z \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dz}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dz}\right)^2}.$$

L'on peut aussi trouver les égalités (1') et (2') directement, à l'aide des coordonnées des points

$$P(x, y, 0) \quad \text{et} \quad T\left(X = x - \frac{dx}{dz}z, \quad Y = y - \frac{dy}{dz}z, \quad Z = 0\right);$$

on voit ainsi que l'expression de la sous-tangente restera la même en coordonnées obliques, comme pour les courbes planes. Les sous-tangentes et tangentes par rapport aux plans des  $yz$  et  $zx$  seront évidemment

$$TP' = x \frac{\sqrt{\beta^2 + \gamma^2}}{\alpha}, \quad T''P'' = x \frac{\sqrt{\gamma^2 + \alpha^2}}{\beta};$$

$$MT' = \frac{x}{\alpha}, \quad M''T'' = \frac{y}{\beta}.$$

5. On appellera *sous-normale principale* en M le segment NP compris entre le point P et le point d'intersection N de la normale principale avec le plan des  $xy$ . La *normale principale* sera le segment MN.

On aura donc, du triangle rectangle MPN,

$$(3) \quad NP = z \operatorname{tang} NMP = z \frac{\sqrt{1 - \zeta^2}}{\zeta} \equiv z \frac{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}}{\zeta},$$

ou bien, en remplaçant  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  par leurs valeurs,

$$(3') \quad NP = z \frac{\sqrt{x''^2 + y''^2}}{z''}$$

( $s$  étant la variable indépendante et les accents désignant les dérivées par rapport à  $s$ ).

On a de même

$$(4) \quad MN = \frac{z}{\cos NMP} = \frac{z}{\zeta},$$

ou bien

$$(4') \quad MN = z \frac{\sqrt{x''^2 + y''^2 + z''^2}}{z''}.$$

On peut aussi déduire les formules (3') et (4') directement des coordonnées des points P ( $x, y, 0$ ) et N ( $x - \frac{x''}{z''} z, y - \frac{y''}{z''} z, 0$ ).

Les grandeurs NP, MN se rapportent au plan des  $xy$ , celles rapportées aux plans des  $yz$  et  $zx$  seront respectivement :

$$\left\{ \begin{array}{l} N'P' = x \frac{\sqrt{\eta^2 + \zeta^2}}{\xi}, \quad N''P'' = y \frac{\sqrt{\zeta^2 + \xi^2}}{\eta}; \\ M'N' = \frac{x}{\xi}, \quad M''N'' = \frac{y}{\eta}. \end{array} \right.$$

6. Enfin, si l'on appelle *sous-binormale* le segment BP, entre le point P et l'intersection B de la binormale avec le plan des  $xy$  et *binormale* le segment MB, on aura de même

$$(5) \quad BP = z \operatorname{tang} BMP = z \frac{\sqrt{1 - \nu^2}}{\nu} \equiv z \frac{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}}{\nu},$$

ou bien

$$(5') \quad BP = z \frac{\sqrt{(y'z'' - y''z')^2 + (z'x'' - z''x')^2}}{x'y'' - x''y'},$$

$$(5'') \quad \equiv z \frac{\sqrt{(x''^2 + y''^2 + z''^2) - (x'y'' - x''y')^2}}{x'y'' - x''y'},$$

et

$$(6) \quad MB = \frac{z}{\cos BMP} = \frac{z}{\nu},$$

ou bien

$$(6') \quad MB = z \frac{\sqrt{(x'y'' - x''y')^2 + (y'z'' - y''z')^2 + (z'x'' - z''x')^2}}{x'y'' - x''y'},$$

$$(6'') \quad = z \frac{\sqrt{x''^2 + y''^2 + z''^2}}{x'y'' - x''y'}.$$

On pourra, comme auparavant, trouver aussi directement les formules (5') et (6'), des coordonnées des points P ( $x, y, 0$ ) et B ( $x - z, \frac{y'z'' - y''z'}{x'y'' - x''y'}, y - z, \frac{z'x'' - z''x'}{x'y'' - x''y'}, 0$ ).

Les grandeurs correspondantes B'P', M'B' et B''P'', M''B'', par rapport aux plans des  $yz$  et  $zx$  seront évidemment

$$\begin{cases} B'P' = \frac{x\sqrt{\mu^2 + \nu^2}}{\lambda}, & M'B' = \frac{x}{\lambda}; \\ B''P'' = \frac{y\sqrt{\nu^2 + \lambda^2}}{\mu}, & M''B'' = \frac{y}{\mu}. \end{cases}$$

### B. Extension aux surfaces [ $z = f(x, y)$ ].

7. On appellera *sous-normale* d'une surface en un point M le segment NP compris entre le pied P de la coordonnée  $z$  sur le plan des  $xy$  et l'intersection N de la normale à la surface avec le plan des  $xy$ . La *normale* sera le segment correspondant MN du point de contact M à N. L'on pourrait considérer par rapport aux deux tangentes aux lignes de courbure de la surface (ou aux tangentes aux lignes asymptotiques des surfaces à courbures opposées), des quantités analogues que l'on nommerait *sous-tangentes* et *tangentes*; mais leur expression analytique étant très compliquée, nous l'omettons, en nous bornant seulement à la *sous-normale* et la *normale*.

Du triangle rectangle MPN, on a

$$(7) \quad NP = z \operatorname{tang} NMP = z \sqrt{p^2 + q^2},$$

et

$$(8) \quad MN = \frac{z}{\cos NMP} = z \sqrt{1 + p^2 + q^2}.$$

Les grandeurs correspondantes par rapport aux plans des  $yz$  et  $zx$  seront (permutation circulaire des  $-p, -q, 1$ ).

$$\left\{ \begin{array}{l} N'P' = x\sqrt{1+q^2}, \\ M'N' = x\frac{\sqrt{1+p^2+q^2}}{-p}, \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} N''P'' = y\sqrt{1+p^2}, \\ M''N'' = y\frac{\sqrt{1+p^2+q^2}}{-q}. \end{array} \right.$$

## II. GRANDEURS POLAIRES

8. *Courbes gauches.* — Si l'on mène par le pôle  $O$  un plan  $P$  perpendiculaire au rayon vecteur, on appellera *sous-tangente* polaire le segment  $TO$ , entre le pôle  $O$  et l'intersection  $T$  de la tangente à la courbe avec le plan  $(P)$ , et *tangente* polaire le segment  $MT$ ; de même si la normale principale et la binormale de la courbe coupant le plan  $(P)$  aux points  $N$  et  $B$ ,  $NO$  et  $MN$  seront respectivement la *sous-normale principale* et la *normale principale polaires*  $BO$  et  $MB$ , la *sous-binormale* et la *binormale* polaires.

9. L'angle  $\omega$  ( $OMT$ ) du rayon vecteur avec la tangente sera

$$\cos \omega = \frac{xdx + ydy + zdz}{\rho ds} = \frac{d\rho}{ds},$$

d'où

$$\text{tang } \omega = \frac{\sqrt{ds^2 - d\rho^2}}{d\rho} \equiv \frac{\rho \sqrt{d\delta^2 + \sin^2 \delta d\psi^2}}{d\rho};$$

on aura donc d'abord :

$$(9) \quad TO = \rho \frac{\sqrt{ds^2 - d\rho^2}}{d\rho}, \quad MT = \frac{\rho}{\cos \omega} = \frac{\rho ds}{d\rho}. \quad (10)$$

10. L'angle  $\varphi$  ( $OMN$ ) de la normale principale avec le rayon vecteur sera

$$\cos \varphi = \frac{(xx'' + yy'' + zz'') R}{\rho}, \quad \text{tang } \varphi = \frac{\sqrt{\rho^2 - R^2 (\Sigma (xx''))^2}}{R \cdot \Sigma (xx'')},$$

( $R$ , rayon de courbure;  $x'', y'', z''$  dérivées secondes par rapport à la variable indépendante  $s$ ).

Cette expression ne se transforme pas facilement en coordonnées polaires (à cause de  $R$ ); il vaut donc mieux conserver l'ex-