

Zeitschrift:	L'Enseignement Mathématique
Herausgeber:	Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band:	3 (1901)
Heft:	1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE
 Artikel:	 EXTENSION AUX COURBES GAUCHES ET AUX SURFACES DES NOTIONS « TANGENTE », « SOUS-TANGENTE » ETC.
Autor:	Hatzidakis, N.-J.
DOI:	https://doi.org/10.5169/seals-4666

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 10.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

EXTENSION AUX COURBES GAUCHES ET AUX SURFACES

DES NOTIONS « TANGENTE », « SOUS-TANGENTE » ETC.

1. Il est curieux que, à ce que je sache, dans aucun livre ne se trouve cette extension, qui cependant est très facile et peut introduire différents problèmes sur les courbes gauches et les surfaces. Nous nous proposons de signaler ici brièvement ces grandeurs, autant cartésiennes que polaires. Ces dernières sont en vérité assez compliquées (surtout en coordonnées polaires), mais les premières sont très courtes et très faciles.

2. On appelle, comme on sait, *sous-tangente*, *sous-normale*, *tangente* et *normale cartésiennes* d'une courbe plane, les grandeurs PT, PK, MT, MK qui ont respectivement pour expressions en coordonnées cartésiennes (axes orthogonaux) :

$$y \frac{dx}{dy}, \quad y \frac{dy}{dx}, \quad y \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy} \right)^2}, \quad y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2},$$

ou, en introduisant les cosinus α et β de la tangente :

$$y \frac{\alpha}{\beta}, y \frac{\beta}{\alpha}, \frac{y}{\beta}, \frac{y}{\alpha}.$$

(ces grandeurs se rapportent à l'axe des x) ; celles rapportées à l'axe des y se trouveront par la permutation des x et y (α, β).

3. On appelle de même *sous-tangente*, *sous-normale*, *tangente* et *normale polaires* d'une courbe plane les grandeurs OT, ON, MT, MN ayant pour expressions en coordonnées polaires :

$$\rho^2 \frac{d\delta}{d\rho}, \quad \frac{d\rho}{d\delta}, \quad \rho \sqrt{1 + \rho^2 \left(\frac{d\delta^2}{d\rho^2} \right)}, \quad \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\delta} \right)^2}.$$

I. GRANDEURS CARTÉSIENNES

A. Extension aux courbes gauches.

4. On appellera dans une courbe gauche (ou, plus généralement, dans une courbe dans l'espace), *sous-tangente* de la courbe en un point M le segment TP compris entre le pied P de la coordonnée z et le point T où la tangente en M à la courbe coupe le plan des yx (ou des yz ou des zx). La *tangente* sera le segment MT, entre T et le point de contact M. Cela posé, on aura, du triangle rectangle MPT,

$$(1) \quad TP = z \operatorname{tang} \angle TMP = z \frac{\sqrt{1 - \gamma^2}}{\gamma} = \frac{z \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{\gamma},$$

ou, si l'on remplace les cosinus de la tangente par leurs valeurs,

$$(1') \quad TP = z \sqrt{\left(\frac{dx}{dz}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dz}\right)^2}.$$

On aura de même

$$(2) \quad MT = z \frac{\cos \angle TMP}{\cos \angle TMP} = \frac{z}{\gamma},$$

ou bien

$$(2') \quad MT = z \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dz}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dz}\right)^2}.$$

L'on peut aussi trouver les égalités (1') et (2') directement, à l'aide des coordonnées des points

$$P(x, y, 0) \text{ et } T\left(X = x - \frac{dx}{dz}z, Y = y - \frac{dy}{dz}z, Z = 0\right);$$

on voit ainsi que *l'expression de la sous-tangente restera la même en coordonnées obliques*, comme pour les courbes planes. Les *sous-tangentes* et *tangentes* par rapport aux plans des yz et zx seront évidemment

$$TP' = x \frac{\sqrt{\beta^2 + \gamma^2}}{\alpha}, \quad T''P'' = x \frac{\sqrt{\gamma^2 + \alpha^2}}{\beta};$$

$$M'T' = \frac{x}{\alpha}, \quad M''T'' = \frac{y}{\beta}.$$

5. On appellera *sous-normale principale* en M le segment NP compris entre le point P et le point d'intersection N de la normale principale avec le plan des xy . La *normale principale* sera le segment MN.

On aura donc, du triangle rectangle MPN,

$$(3) \quad NP = z \tan \angle NMP = z \frac{\sqrt{1 - \zeta^2}}{\zeta} \equiv z \frac{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}}{\zeta},$$

ou bien, en remplaçant ξ , η , ζ par leurs valeurs,

$$(3') \quad NP = z \frac{\sqrt{x''^2 + y''^2}}{z''}$$

(s étant la variable indépendante et les accents désignant les dérivées par rapport à s).

On a de même

$$(4) \quad MN = \frac{z}{\cos \angle NMP} = \frac{z}{\zeta},$$

ou bien

$$(4') \quad MN = z \frac{\sqrt{x''^2 + y''^2 + z''^2}}{z''}.$$

On peut aussi déduire les formules (3') et (4') directement des coordonnées des points P (x, y, o) et N $\left(x - \frac{x''}{z''} z, y - \frac{y''}{z''} z, o\right)$.

Les grandeurs NP, MN se rapportent au plan des xy , celles rapportées aux plans des yz et zx seront respectivement :

$$\begin{cases} N'P' = x \frac{\sqrt{\eta^2 + \zeta^2}}{\xi}, & N''P'' = y \frac{\sqrt{\zeta^2 + \xi^2}}{\eta}; \\ M'N' = \frac{x}{\xi}, & M''N'' = \frac{y}{\eta}. \end{cases}$$

6. Enfin, si l'on appelle *sous-binormale* le segment BP, entre le point P et l'intersection B de la binormale avec le plan des xy et *binormale* le segment MB, on aura de même

$$(5) \quad BP = z \tan \angle BMP = z \frac{\sqrt{1 - \nu^2}}{\nu} \equiv z \frac{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}}{\nu},$$

ou bien

$$(5') \quad BP = z \frac{\sqrt{(y'z'' - y''z')^2 + (z'x'' - z''x')^2}}{x'y'' - x''y'},$$

$$(5'') \quad \equiv z \frac{\sqrt{(x''^2 + y''^2 + z''^2)^2 - (x'y'' - x''y')^2}}{x'y'' - x''y'},$$

et

$$(6) \quad MB = \frac{z}{\cos BMP} = \frac{z}{\varphi},$$

ou bien

$$(6') \quad MB = z \frac{\sqrt{(x'y'' - x''y')^2 + (y'z'' - y''z')^2 + (z'x'' - z''x')^2}}{x'y'' - x''y'},$$

$$(6'') \quad = z \frac{\sqrt{x''^2 + y''^2 + z''^2}}{x'y'' - x''y'}.$$

On pourra, comme auparavant, trouver aussi directement les formules (5') et (6'), des coordonnées des points P (x, y, o) et B $\left(x - z, \frac{y'z'' - y''z'}{x'y'' - x''y'}, y - z, \frac{z'x'' - z''x'}{x'y'' - x''y'}, o \right)$.

Les grandeurs correspondantes $B'P'$, $M'B'$ et $B''P''$, $M''B''$, par rapport aux plans des yz et zx seront évidemment

$$\begin{cases} B'P' = \frac{x\sqrt{\mu^2 + \nu^2}}{\lambda}, & M'B' = \frac{x}{\lambda}; \\ B''P'' = \frac{y\sqrt{\nu^2 + \lambda^2}}{\mu}, & M''B'' = \frac{y}{\mu}. \end{cases}$$

B. Extension aux surfaces [$z = f(x, y)$].

7. On appellera *sous-normale* d'une surface en un point M le segment NP compris entre le pied P de la coordonnée z sur le plan des xy et l'intersection N de la normale à la surface avec le plan des xy . La *normale* sera le segment correspondant MN du point de contact M à N. L'on pourrait considérer par rapport aux deux tangentes aux lignes de courbure de la surface (ou aux tangentes aux lignes asymptotiques des surfaces à courbures opposées), des quantités analogues que l'on nommerait *sous-tangentes* et *tangentes*; mais leur expression analytique étant très compliquée, nous l'omettons, en nous bornant seulement à la *sous-normale* et la *normale*.

Du triangle rectangle MPN, on a

$$(7) \quad NP = z \operatorname{tang} NMP = z \sqrt{p^2 + q^2},$$

et

$$(8) \quad MN = \frac{z}{\cos NMP} = z \sqrt{1 + p^2 + q^2}.$$

Les grandeurs correspondantes par rapport aux plans des yz et zx seront (permutation circulaire des $-p$, $-q$, 1).

$$\left\{ \begin{array}{l} N'P' = x\sqrt{1+q^2}, \\ M'N' = x\frac{\sqrt{1+p^2+q^2}}{-p}, \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} N''P'' = y\sqrt{1+p^2}, \\ M''N'' = y\frac{\sqrt{1+p^2+q^2}}{-q}. \end{array} \right.$$

II. GRANDEURS POLAIRES

8. *Courbes gauches.* — Si l'on mène par le pôle O un plan P perpendiculaire au rayon vecteur, on appellera *sous-tangente polaire* le segment TO, entre le pôle O et l'intersection T de la tangente à la courbe avec le plan (P), et *tangente polaire* le segment MT ; de même si la normale principale et la binormale de la courbe coupant le plan (P) aux points N et B, NO et MN seront respectivement la *sous-normale principale* et la *normale principale polaires* BO et MB, la *sous-binormale* et la *binormale polaires*.

9. L'angle ω (OMT) du rayon vecteur avec la tangente sera

$$\cos \omega = \frac{xdx + ydy + zdz}{\rho ds} = \frac{d\rho}{ds},$$

d'où

$$\tang \omega = \frac{\sqrt{ds^2 - d\rho^2}}{d\rho} = \frac{\rho \sqrt{d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\psi^2}}{d\rho};$$

on aura donc d'abord :

$$(9) \quad \text{TO} = \rho \frac{\sqrt{ds^2 - d\rho^2}}{d\rho}, \quad \text{MT} = \frac{\rho}{\cos \omega} = \frac{\rho ds}{d\rho}. \quad (10)$$

10. L'angle φ (OMN) de la normale principale avec le rayon vecteur sera

$$\cos \varphi = \frac{(xx'' + yy'' + zz'') R}{\rho}, \quad \tang \varphi = \frac{\sqrt{\rho^2 - R^2 (\Sigma (xx'')^2)}}{R \cdot \Sigma (xx'')},$$

(R, rayon de courbure ; x'', y'', z'' dérivées secondes par rapport à la variable indépendante s).

Cette expression ne se transforme pas facilement en coordonnées polaires (à cause de R) ; il vaut donc mieux conserver l'ex-

pression cartésienne de la sous-normale principale et de la normale principale polaires, qui seront

$$\left\{ \begin{array}{l} NO = \rho \tan \varphi = \sqrt{\Sigma(x^2)} \sqrt{\frac{\Sigma(x^2) \Sigma(x'^2)}{(\Sigma(xx'))^2}} - 1, \end{array} \right. \quad (11)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} MN = \frac{\rho}{\cos \varphi} = \frac{\Sigma(x^2) \sqrt{\Sigma(x'^2)}}{\Sigma xx'} . \end{array} \right. \quad (12)$$

11. De même, on aura

$$\begin{aligned} \cos \chi (\equiv \cos OMB) &= \frac{x\lambda + y\mu + z\nu}{\rho} \\ &\equiv \frac{R}{\rho} \sum_{x, y, z} [x(y'z'' - y''z')] + \tan \chi \\ &= \frac{\sqrt{\rho^2 - R^2 (\Sigma[x(y'z'' - y''z')])^2}}{R \cdot \Sigma[x(y'z'' - y''z')]} , \end{aligned}$$

expression qui, de même, ne se transforme pas élégamment en coordonnées polaires. On aura donc les expressions cartésiennes des sous-binormale et binormale polaires :

$$\left\{ \begin{array}{l} BO = \rho \tan \chi = \sqrt{\Sigma(x^2)} \sqrt{\frac{\Sigma(x^2) \cdot \Sigma(x'^2)}{\{\Sigma[x(y'z'' - y''z')]\}^2}} - 1, \end{array} \right. \quad (13)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} MB = \frac{\rho}{\cos \chi} = \frac{\Sigma(x^2) \sqrt{\Sigma(x'^2)}}{\Sigma[x(y'z'' - y''z')]} . \end{array} \right. \quad (14)$$

12. Quant aux problèmes que l'on peut se proposer sur les grandeurs précédentes, il y aura en général de très difficiles à résoudre, mais en combinant adroitemment les différentes grandeurs par rapport aux différents plans coordonnés, on pourra en trouver aussi de très faciles qui pourraient trouver place dans les livres d'enseignement.

N.-J. HATZIDAKIS (Athènes).