

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 3 (1901)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LA DÉMONSTRATION DU THÉORÈME DE TAYLOR
Autor: Suppautschitsch, Richard
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-4663>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 27.04.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

En tenant compte de la relation bien connue :

$$P_p \cdot Q_{p-1} - P_{p-1} \cdot Q_p = \pm 1,$$

on peut former l'équation

$$Q_{p-1}^2 + 2\lambda B Q_{p-1} - (A - \lambda^2) B^2 \mp 1 = 0,$$

qui, résolue en Q_{p-1} , donne :

$$Q_{p-1} = -\lambda B + \sqrt{AB^2 \pm 1}$$

où l'on a

$$B = \frac{Q_p}{n} = \frac{P_{p-1}}{m}.$$

On aurait trouvé de même

$$P_p = \lambda B + \sqrt{AB^2 \pm 1}.$$

Comme ces valeurs doivent être des nombres entiers, on en déduit que la quantité sous le radical est un carré parfait ; ce qui donne lieu au théorème suivant de la théorie des nombres.

THÉORÈME. — *Etant donné un nombre A non carré parfait il existe un ou plusieurs nombres entiers B, tels que l'on a $A - B^2 \pm 1$ carré parfait.*

Il faut remarquer qu'au nombre A correspondent un nombre limité d'irrationnelles y , et par conséquent aussi un nombre limité de valeurs B.

L. CRELIER (Bienne).

SUR LA DÉMONSTRATION DU THÉORÈME DE TAYLOR

I. — M. Hatzidakis (Athènes) a donné dans cette revue (II, p. 447) un article très intéressant sur une démonstration simplifiée de la formule de Taylor. Cependant trois inconvénients m'inspirent des scrupules :

1° L'adoption arbitraire des fonctions :

$$\sigma(x + \omega) - \sigma(x) - \omega \sigma'(x) - \Gamma \frac{\omega^2}{\varepsilon^2}, \quad (\alpha)$$

et

$$\sigma(x + \omega) - \sigma(x) - \frac{\omega}{1!} \sigma'(x) - \frac{\omega^2}{2!} \sigma''(x) - \dots - \frac{\omega^r}{r!} \sigma^{(r)}(x) - \Gamma \frac{\omega^{r+1}}{\varepsilon^{r+1}}; \quad (\beta)$$

2° La supposition attaquable que Γ , en réalité, fonction de n' et x , soit, dans la différentiation, une quantité constante ;

3° L'invraisemblance de pouvoir trouver la fonction (β) avant de connaître la formule de Taylor elle-même.

II. — J'essaierai donc de démontrer, sans hypothèses arbitraires, que le théorème de Taylor résulte presque immédiatement du théorème de *Rolle*.

Supposons (ce qu'il faut admettre dans ce théorème), que non seulement $f(x)$, mais aussi $f'(x)$, $f''(x)$, ..., $f^{(n)}(x)$ soient continues.

On aura donc :

$$f(x + h) = f(x) + h f'(x + \theta_1 h);$$

mais, en outre,

$$f'(x + \theta_1 h) = f'(x) + \theta_1 h f''(x + \theta_2 \theta_1 h)$$

.....

$$f^{(n)}(x + \theta_n \theta_{n-1} \dots \theta_1 h) = f^{(n)}(x) + \theta_n \dots \theta_1 f^{(n+1)}(x + \theta_{n+1} \theta_n \dots \theta_1 h).$$

et pour chaque θ_i :

$$0 < \theta_i < 1.$$

Or, bien que plusieurs $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{n+1}$ puissent répondre à chaque équation, chaque expression se compose de deux parties, c'est-à-dire d'une partie, susceptible d'une seule interprétation, et d'une autre susceptible de plusieurs interprétations. Celle-ci disparaît continuellement et ne reste qu'à la dernière expression :

$$f^{(n+1)}(x + \theta_{n+1} \theta_n \dots \theta_1 h).$$

III. — Je multiplie d'abord les équations (1) (la 2^e, 3^e, 4^e...) par $h, \theta_1 h^2, \theta_2 \theta_1^2 h^3, \dots$ etc., et j'obtiens, en les additionnant :

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \theta_1 h^2 f''(x) + \theta_2 \theta_1^2 h^3 f'''(x) + \dots$$

$$\dots + \theta_{n-1} \theta_1^{n-2} \dots \theta_1^{n-1} h^n f^{(n)}(x) + \Phi \quad (2)$$

où

$$\Phi = \theta_n \theta_1^{n-1} \dots \theta_1^n h^{n+1} f^{(n+1)}(x + \theta h). \quad 0 < \theta < 1.$$

De plus, en supposant h variable, on aura les dérivations successives de (2) :

$$f'(x+h) = f'(x) + 2\theta_1 h f''(x) + 3\theta_2 \theta_1^2 h^2 f'''(x) + \dots + D_h \Phi$$

$$f''(x+h) = \quad \quad \quad 1.2 \theta_1 f''(x) + 2.3.\theta_2 \theta_1^2 h f'''(x) + \dots + D_h^{(2)} \Phi$$

$$\dots$$

$$f^{(n+1)}(x+h) = D_h^{(n+1)} \Phi = \theta_n \theta_1^{n-1} \dots \theta_1^n \left[\frac{1}{n+1} f^{(n+1)}(x + \theta h) \right.$$

$$\left. + \binom{n-1}{1} n. \theta f^{(n+2)}(x + \theta h) + \dots + \binom{n+1}{n+1} h^{n+1} \theta f^{(n+1)}(x + \theta h) \right].$$

Donnons à h dans toutes ces équations la valeur $h=0$, nous aurons :

$$\theta_1 = \frac{1}{2!}; \quad \theta_2 \theta_1^2 = \frac{1}{3!}; \quad \dots \quad \theta_n \theta_1^{n-1} \dots \theta_1^n = \frac{1}{n+1!}$$

donc :

$$f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1!} f'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) + \dots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x) +$$

$$+ \frac{h^{n+1}}{n+1!} f^{(n+1)}(x + \theta h) \quad (3)$$

Ainsi toutes les expressions (1), dont nous avons parlé ci-dessus (II) deviennent interprétables d'une seule manière à l'exception du dernier terme de (3), qui s'annule, comme on le sait, dans tous les cas où cette formule peut avoir lieu.

RICHARD SUPPAUTSCHITSCH (Vienne, Autriche).