Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 3 (1901)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: NOTE SUR LE DÉVELOPPEMENT DE CERTAINES IRRATIONNELLES DE LA FORME $\frac{\sqrt{A}+M}{P}$ EN FRACTIONS CONTINUES

Autor: Crelier, L.

Kapitel: VIII

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-4662

Mais il est à remarquer, que le premier terme de y' est le deuxième de y, (α), et ainsi de suite ; on aura donc, à cause de la symétrie connue de ces irrationnelles

$$y = \sqrt{A} + b = [2b, b_1, b_2, \ldots, b_2, b_1; 2b, \ldots]$$

et

$$\sqrt{A} = [b, b_1, b_2, \ldots, b_2, b_1, 2b; b_1, b_2, \ldots],$$

développement donné par Legendre [1].

Remarque. — Le second sommet de la symétrie dans ce développement ne peut être formé de deux quotients incomplets égaux qu'au cas où A est décomposable en une somme de deux carrés parfaits différents et plus grands que 1.

VIII

Si p est le nombre des quotients incomplets de la période de y et $\frac{P_p}{Q_p}$ la partie réduite de ladite fraction continue, on a :

$$y = \frac{P_p y + P_{p-1}}{Q_p y + Q_{p-1}}$$

et

$$y' = \frac{P_p y' + Q_p}{P_{p-1} y' + Q_{p-1}}$$

Les valeurs y et $-\frac{1}{y'}$, sont les racines de l'équation :

$$n\chi^2 - 2\lambda\chi - m = 0,$$

ou de l'équation

$$Q_p\chi^2 + (Q_{p-1} - P_p)\chi - Q_p = 0.$$

La proportionnalité des coefficients donne :

$$\begin{aligned} nB &= Q_p \\ -2\lambda B &= Q_{p-1} = -P_p \\ mB &= P_{p-1}. \end{aligned}$$

[1] LEGENDRE. *Théorie des nombres.*

En tenant compte de la relation bien connue :

$$P_p . Q_{p-1} - P_{p-1} . Q_p = \pm 1,$$

on peut former l'équation

$$Q_{p-1}{}^2 + 2\lambda B \, Q_{p-1} - (A - \lambda^2) B^n \mp 1 = 0,$$

qui, résolue en $Q p r$, donne :

$$Q_{p-1} = -\lambda B + \sqrt{AB^2 \pm 1}$$

où l'on a

$$B = \frac{Q_p}{n} = \frac{P_{p-1}}{m}.$$

On aurait trouvé de même

$$P_p = \lambda B + \sqrt{AB^2 \pm 1}.$$

Comme ces valeurs doivent être des nombres entiers, on en déduit que la quantité sous le radical est un carré parfait ; ce qui donne lieu au théorème suivant de la théorie des nombres.

THÉORÈME. — *Etant donné un nombre* A *non carré parfait il existe un ou plusieurs nombres entiers* B, *tels que l'on a* $A . B^2 \pm 1$ *carré parfait.*

Il faut remarquer qu'au nombre A correspondent un nombre limité d'irrationnelles y, et par conséquent aussi un nombre limité de valeurs B.

L. CRELIER (Bienne).

SUR LA DÉMONSTRATION

DU THÉORÈME DE TAYLOR

I. — M. Hatzidakis (Athènes) a donné dans cette revue (II, p. 447) un article très intéressant sur une démonstration simplifiée de *la formule de Taylor*. Cependant trois inconvénients m'inspirent des scrupules :