

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 3 (1901)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** NOTE SUR LE DÉVELOPPEMENT DE CERTAINES  
IRRATIONNELLES DE LA FORME  $\frac{\sqrt{A}+M}{P}$  EN  
FRACTIONS CONTINUES

**Autor:** Crelier, L.

**Kapitel:** VII

**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-4662>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 27.04.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

**THÉORÈME.** — *Toute équation du deuxième degré à coefficients entiers, dont les racines sont réelles et irrationnelles donne pour ces racines deux fractions continues périodiques.*

*Elles sont périodiques mixtes, de même signe, avec partie irrégulière indéterminée, mais limitée quand c est positif.*

*Elles sont périodiques mixtes, de signes contraires, avec un seul quotient incomplet à la partie irrégulière quand c est négatif et quand les valeurs absolues des racines sont toutes deux plus grandes que 1, ou plus petites que 1.*

*Elles sont périodiques simples et de signes contraires quand c est négatif et quand la valeur absolue d'une des racines est supérieure à l'unité alors que la valeur absolue de l'autre est inférieure à l'unité.*

*Dans ce cas, la période de l'une est formée des quotients incomplets de l'autre pris dans l'ordre renversé.*

## VII

Ces irrationnelles permettent de donner également une nouvelle démonstration du développement de Legendre pour les racines carrées des nombres entiers.

Soit à développer  $\sqrt{\bar{A}}$  : Nous poserons :

$$A - b^2 = n_1 \cdot 1.$$

$b^2$  étant le plus carré parfait.

Les irrationnelles  $\frac{\sqrt{\bar{A}} + b}{1}$  et  $\frac{\sqrt{\bar{A}} + b}{n}$  seront de la forme  $y$  et  $y'$  et nous aurons :

$$(\alpha) \frac{\sqrt{\bar{A}} + b}{1} = 2b + \frac{\sqrt{\bar{A}} + b}{1} = 2b + \frac{1}{\frac{\sqrt{\bar{A}} + b}{n}}.$$

La période correspondant à la 1<sup>re</sup> irrationnelle s'écrira

$$y = \frac{\sqrt{\bar{A}} + b}{1} = [2b, b_1, b_2, \dots, b_{p-1}, b_p; 2b, \dots].$$

Celle correspondant à la 2<sup>e</sup>, s'écrira par raison de symétrie

$$y' = \frac{\sqrt{\bar{A}} + b}{n} = [b_p, b_{p-1}, \dots, b_2, b_1, 2b; b_p \dots].$$

Mais il est à remarquer, que le premier terme de  $y'$  est le deuxième de  $y$ , ( $\alpha$ ), et ainsi de suite; on aura donc, à cause de la symétrie connue de ces irrationnelles

$$y = \sqrt{A} + b = [2b, b_1, b_2, \dots, b_2, b_1; 2b, \dots]$$

et

$$\sqrt{A} = [b, b_1, b_2, \dots, b_2, b_1, 2b; b_1, b_2, \dots],$$

développement donné par Legendre <sup>(1)</sup>.

*Remarque.* — Le second sommet de la symétrie dans ce développement ne peut être formé de deux quotients incomplets égaux qu'au cas où  $A$  est décomposable en une somme de deux carrés parfaits différents et plus grands que 1.

## VIII

Si  $p$  est le nombre des quotients incomplets de la période de  $y$  et  $\frac{P_p}{Q_p}$  la partie réduite de ladite fraction continue, on a :

$$y = \frac{P_p y + P_{p-1}}{Q_p y + Q_{p-1}}$$

et

$$y' = \frac{P_p y' + Q_p}{P_{p-1} y' + Q_{p-1}}$$

Les valeurs  $y$  et  $-\frac{1}{y'}$ , sont les racines de l'équation :

$$n \chi^2 - 2\lambda \chi - m = 0,$$

ou de l'équation

$$Q_p \chi^2 + (Q_{p-1} - P_p) \chi - Q_p = 0.$$

La proportionnalité des coefficients donne :

$$\begin{aligned} nB &= Q_p \\ -2\lambda B &= Q_{p-1} = -P_p \\ mB &= P_{p-1} \end{aligned}$$

<sup>(1)</sup> LEGENDRE. *Théorie des nombres.*