

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 3 (1901)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: NOTE SUR LE DÉVELOPPEMENT DE CERTAINES
IRRATIONNELLES DE LA FORME $\frac{\sqrt{A}+M}{P}$ EN
FRACTIONS CONTINUES

Autor: Crelier, L.
Kapitel: VI
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-4662>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 06.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Donc

$$r_{k+1} + b = (r_k - b) - p_{k+1} \cdot n_{k+1}.$$

En outre,

$$r_{k+2} = r_{k+1} + 2b - p_{k+2} \cdot n_{k+2}$$

et

$$r_{k+2} - b = (r_{k+1} + b) - p_{k+2} \cdot n_{k+2}.$$

C. q. f. d.

On arrivera donc une fois à une valeur

$$x_\lambda = \frac{M + \sqrt{A}}{n_{\lambda+1}}, \text{ telle que } M < b.$$

Cette valeur donnera :

$$x_{\lambda+1} = \frac{\sqrt{A} + (b - r_{\lambda+1})}{n_{\lambda+2}},$$

une irrationnelle de la forme y ou y' qui se développe en fraction continue périodique simple, car $n_{\lambda+1} < 2b$,

$$r_{\lambda+1} < b$$

et

$$x_{\lambda+1} > 1.$$

Le radical \sqrt{A} dans x_λ ne saurait être négatif, car il entraînerait une irrationnelle négative, ce qui est impossible, et le raisonnement subsiste pour

$$V_1 = \frac{\lambda - \sqrt{A}}{n_1}.$$

Il en résulte la loi suivante :

Les irrationnelles de la forme $V_1 = \frac{\lambda \pm \sqrt{A}}{n_1}$ ou $V_2 = \frac{\lambda \pm \sqrt{A}}{m_1}$ se développant en fractions continues périodiques mixtes ; la partie irrégulière a un nombre indéterminé mais limité de quotients incomplets.

VI

Ces théories appliquées aux racines des équations du 2^e degré nous conduisent à une forme nouvelle plus complète du théorème de Lagrange.

Prenons les équations à coefficients entiers

$$ax^2 \pm bx - c = 0$$

et

$$ax_2 \pm bx + c = 0.$$

Les racines de la 1^{re} sont :

$$x' = \frac{\mp b + \sqrt{b^2 + 4ac}}{2a} \quad x'' = \frac{\mp b - \sqrt{b^2 + 4ac}}{2a}$$

On a $A = b^2 - 4ac$; en faisant $\lambda = b$, $2a = m$; $2c = n$, on écrit :

$$x_1' = \frac{\sqrt{A} - \lambda}{m}$$

et

$$x_2' = \frac{\sqrt{A} + \lambda}{m}$$

$$x_1'' = -\frac{\sqrt{A} + \lambda}{m} \quad x_2'' = -\frac{\sqrt{A} - \lambda}{m}$$

On voit donc que, si les deux racines d'une équation sont toutes deux en valeur absolue plus grandes ou plus petites que l'unité, ces irrationnelles sont de la forme t . Elles seront de la forme y ou z , si une des racines est en valeur absolue plus grande que 1, tandis que l'autre est plus petite.

Les racines de la seconde équation sont :

$$x' = \frac{\mp b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

et

$$x'' = \frac{\mp b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Avec la substitution, on trouve

$$x_3' = -\frac{\lambda - \sqrt{A}}{m}, \quad x_4' = \frac{\lambda + \sqrt{A}}{m},$$

$$x_3'' = -\frac{\lambda + \sqrt{A}}{m}, \quad x_4'' = \frac{\lambda - \sqrt{A}}{m},$$

Les racines sont toutes de la forme V.

THÉOREME. — *Toute équation du deuxième degré à coefficients entiers, dont les racines sont réelles et irrationnelles donne pour ces racines deux fractions continues périodiques.*

Elles sont périodiques mixtes, de même signe, avec partie irrégulière indéterminée, mais limitée quand c est positif.

Elles sont périodiques mixtes, de signes contraires, avec un seul quotient incomplet à la partie irrégulière quand c est négatif et quand les valeurs absolues des racines sont toutes deux plus grandes que 1, ou plus petites que 1.

Elles sont périodiques simples et de signes contraires quand c est négatif et quand la valeur absolue d'une des racines est supérieure à l'unité alors que la valeur absolue de l'autre est inférieure à l'unité.

Dans ce cas, la période de l'une est formée des quotients incomplets de l'autre pris dans l'ordre renversé.

VII

Ces irrationnelles permettent de donner également une nouvelle démonstration du développement de Legendre pour les racines carrées des nombres entiers.

Soit à développer \sqrt{A} : Nous poserons :

$$A - b^2 = n_1 \cdot 1.$$

b^2 étant le plus carré parfait.

Les irrationnelles $\frac{\sqrt{A} + b}{1}$ et $\frac{\sqrt{A} + b}{n}$ seront de la forme y et y' et nous aurons :

$$(\alpha) \quad \frac{\sqrt{A} + b}{1} = 2b + \frac{\sqrt{A} + b}{1} = 2b + \frac{1}{\frac{\sqrt{A} + b}{n}}.$$

La période correspondant à la 1^{re} irrationnelle s'écrira

$$y = \frac{\sqrt{A} + b}{1} = [2b, b_1, b_2, \dots, b_{p-1}, b_p; 2b, \dots].$$

Celle correspondant à la 2^e, s'écrira par raison de symétrie

$$y' = \frac{\sqrt{A} + b}{n} = [b_p, b_{p-1}, \dots, b_2, b_1, 2b; b_p, \dots].$$