Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 3 (1901)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: NOTE SUR LE DÉVELOPPEMENT DE CERTAINES IRRATIONNELLES DE LA FORME $\frac{\sqrt{A}+M}{P}$ EN FRACTIONS CONTINUES

Autor: Crelier, L.

Kapitel: V

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-4662

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 27.04.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

$A - (b - r^2) = m_1 . m_2$, en procédant comme dans (4). En outre $x_1 > 1$, et l'irrationnelle $\frac{\sqrt{A} + b - r}{m_2}$ est de la forme y ou y', car m_1 et m_2 sont inférieurs $\sqrt{A} + b - r$.

Le développement de t_3 entraîne

$$t_2 = l' + \frac{\sqrt{A} + (b - r')}{m_1} = l' + \frac{1}{x_1'}.$$

Ici encore, il est facile de voir que l'irrationnelle x_1 est de la forme y ou y'. D'où il suit que :

Les irrationnelles t_1, t_2, t_3 t_4, se développent en fractions continues périodiques mixtes, plus petites ou plus grandes que l'unité. La partie irrégulière ne comprend qu'un seul quotient incomplet.

On peut remarquer que, pour deux irrationnelles comme

$$t_2 = \frac{\sqrt{A} + \lambda}{m_1}$$

et

$$t_4 = \frac{\sqrt{A} - \lambda}{m_1}$$

toutes deux supérieures à l'unité, les parties périodiques sont identiques dès que l'on a 2λ divisible par m_1.

V

Nous avons vu des irrationnelles dépendant de $\lambda^2 < A$. On peut aussi en construire avec $\lambda^2 > A$.

Posons :

$$\lambda^2 - A = n_1 m_1.$$

Il en résulte des valeurs comme :

$$V_1 = \frac{\lambda \pm \sqrt{A}}{n_1} \tag{13}$$

et

$$V_2 = \frac{\lambda \pm \sqrt{A}}{m_1}$$

Ces irrationnelles peuvent être plus grandes ou plus petites que l'unité suivant que les valeurs n_1 et m_1 sont comprises entre $\lambda + \sqrt{A}$ et $\lambda - \sqrt{A}$, ou en dehors de ces valeurs. Les valeurs inférieures à l'unité se ramènent évidemment à l'inverse des valeurs supérieures.

Etudions une de ces dernières, soit : $V_1 > 1$ et

$$V_1 = \frac{\lambda + \sqrt{A}}{n_1}.$$

On a :

$$V_1 = \frac{\lambda + b - r}{n_1} + \frac{\sqrt{A} - b + r_1}{n_1} = p_1 + \frac{(r_1 - b) + \sqrt{A}}{n_1} = p_1 + \frac{1}{x_1}.$$

Le reste r peut être évidemment plus grand que b.

On a encore :

$$x_1 = \frac{(r_1 - b) - \sqrt{A}}{n_2} = p_2 + \frac{(r_2 + b) - \sqrt{A}}{n_2} = \frac{1}{x_2}$$

$$x_2 = \frac{(r_2 + b) - \sqrt{A}}{n_3} = p_3 + \frac{1}{x_3}$$

. . . .

car

$$(r_1 - b)^2 - A = n_1 . n_2$$

et

$$(r_k - b)^2 - A = n_k . n_{k+1}. \tag{14}$$

La première formule et la généralisation s'établissent comme pour la formule (4).

Le terme général prend la forme :

$$x_k = \frac{(r_k - b) - \sqrt{A}}{n_{k+1}}$$

$$x_{k+1} = \frac{(r_{k+1} + b) + \sqrt{A}}{n_{k+2}}$$

$$x_{k+2} = \frac{(r_{k+2} - b) - \sqrt{A}}{n_{k+3}}.$$

Il est à remarquer que les valeurs $(r_k - b)$, $(r_{k+1} + b)$ et $(r_{k+2} - b)$ vont en diminuant. En effet :

$$r_{k+1} = r_k - 2b - p_{k+1} . n_{k+1}.$$

Donc

$$r_{k+1} + b = (r_k - b) - p_{k+1} \cdot n_{k+1}.$$

En outre,

$$r_{k+2} = r_{k+1} + 2b - p_{k+2} \cdot n_{k+2}$$

et

$$r_{k+2} - b = (r_{k+1} + b) - p_{k+2} \cdot n_{k+2}.$$

C. q. f. d.

On arrivera donc une fois à une valeur

$$x_\lambda = \frac{M + \sqrt{A}}{n_{\lambda+1}}, \text{ telle que } M < b.$$

Cette valeur donnera :

$$x_{\lambda+1} = \frac{\sqrt{A} + (b - r_{\lambda+1})}{n_{\lambda+2}},$$

une irrationnelle de la forme y ou y' qui se développe en fraction continue périodique simple, car $n_{\lambda+1} < 2b$,

$$r_{\lambda+1} < b$$

et

$$x_{\lambda+1} > 1.$$

Le radical $\sqrt{A}$ dans x_λ ne saurait être négatif, car il entraînerait une irrationnelle négative, ce qui est impossible, et le raisonnement subsiste pour

$$V_1 = \frac{\lambda - \sqrt{A}}{n_1}.$$

Il en résulte la loi suivante :

Les irrationnelles de la forme $V_1 = \frac{\lambda \pm \sqrt{A}}{n_1}$ *ou* $V_2 = \frac{\lambda \pm \sqrt{A}}{m_1}$ *se développant en fractions continues périodiques mixtes ; la partie irrégulière a un nombre indéterminé mais limité de quotients incomplets.*

VI

Ces théories appliquées aux racines des équations du 2^e^ degré nous conduisent à une forme nouvelle plus complète du théorème de Lagrange.