n_1 et m_1 étant liées par les mêmes relations que précédemment.

On a :

$$z < 1$$

et

$$z' < 1$$

ou

(10) $$z = \frac{\sqrt{A} - \lambda}{n_1} = \frac{1}{\dfrac{n_1}{\sqrt{A} - \lambda}} = \frac{1}{\dfrac{\sqrt{A} - \lambda}{m_1}} = \frac{1}{y'}$$

et de même

(11) $$z' = \frac{1}{y}$$

Les irrationnelles z *et* z′ *suivent la même loi que* y *et* y'.

IV

Considérons maintenant des irrationnelles telles que

(12) $$t_1 = \frac{\sqrt{A} + \lambda}{n_1}; \quad t_2 = \frac{\sqrt{A} + \lambda}{m_1}; \quad t_3 = \frac{\sqrt{A} - \lambda}{n_1}; \quad t_4 = \frac{\sqrt{A} - \lambda}{m_1},$$

où $A - \lambda^2 = n_1 . m_1$, mais un des facteurs, n_1 par exemple, donne :

$$\sqrt{A} + \lambda < n_1.$$

Il en résulte

$$m_1 < \sqrt{A} - \lambda.$$

On a alors :

$$t_1 < 1, \ t_2 > 1, \ t_3 < 1, \ t_4 > 1.$$

L'étude de ces valeurs donne :

$$t_1 = \frac{1}{t_4}$$

et

$$t_3 = \frac{1}{t_2}.$$

D'autre part

$$t_4 = l + \frac{\sqrt{A} - (b - r)}{m_1} = l + \frac{1}{x_1}.$$

Mais $x_1 = \dfrac{\sqrt{A} + b - r}{m_2}$, car il est facile de développer l'équation

$A - (b - r^2) = m_1 . m_2$, en procédant comme dans (4). En outre $x_1 > 1$, et l'irrationnelle $\frac{\sqrt{A} + b - r}{m_2}$ est de la forme y ou y', car m_1 et m_2 sont inférieurs $\sqrt{A} + b - r$.

Le développement de t_3 entraîne

$$t_2 = l' + \frac{\sqrt{A} + (b - r')}{m_1} = l' + \frac{1}{x_1'}.$$

Ici encore, il est facile de voir que l'irrationnelle x_1 est de la forme y ou y'. D'où il suit que :

Les irrationnelles t_1, t_2, t_3 t_4, se développent en fractions continues périodiques mixtes, plus petites ou plus grandes que l'unité. La partie irrégulière ne comprend qu'un seul quotient incomplet.

On peut remarquer que, pour deux irrationnelles comme

$$t_2 = \frac{\sqrt{A} + \lambda}{m_1}$$

et

$$t_4 = \frac{\sqrt{A} - \lambda}{m_1}$$

toutes deux supérieures à l'unité, les parties périodiques sont identiques dès que l'on a 2λ divisible par m_1.

V

Nous avons vu des irrationnelles dépendant de $\lambda^2 < A$. On peut aussi en construire avec $\lambda^2 > A$.

Posons :

$$\lambda^2 - A = n_1 m_1.$$

Il en résulte des valeurs comme :

(13) $$V_1 = \frac{\lambda \pm \sqrt{A}}{n_1}$$

et

$$V_2 = \frac{\lambda \pm \sqrt{A}}{m_1}$$