Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 3 (1901)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: NOTE SUR LE DÉVELOPPEMENT DE CERTAINES IRRATIONNELLES DE LA FORME $\frac{\sqrt{A}+M}{P}$ EN FRACTIONS CONTINUES

Autor: Crelier, L.

Kapitel: I

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-4662

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 27.04.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

NOTE SUR LE DÉVELOPPEMENT

DE CERTAINES IRRATIONNELLES DE LA FORME

$$\frac{\sqrt{A} + M}{P}$$

EN FRACTIONS CONTINUES

I

Posons :

$$A - \lambda^2 = n_1 m_1,$$

λ étant entier inférieur à b et le plus grand carré parfait contenu dans A, n_1 et m_1 étant entiers, positifs et compris tous deux entre $(b + \lambda)$ et $(b - \lambda)$; puis développons en fractions continues, les irrationnelles :

$$\frac{\sqrt{A} + \lambda}{n_1} = y$$

et

$$\frac{\sqrt{A} + \lambda}{m_1} = y'.$$

On peut poser :

$$y = \frac{b + \lambda}{n_1} + \frac{\sqrt{A} - b}{n_1} = k_1 + \frac{\sqrt{A} - (b - r_1)}{n_1} = k_1 = \frac{1}{x_1} ;$$

on avait $y > 1$, il en résulte $k_1 \geqq 1$ et $x_1 > 1$, et ces trois valeurs sont évidemment positives.

Le reste de la première division, r_1 donne :

$$b + \lambda - n_1 k_1 = r_1,$$

et l'on a $r_1 < n_1$ et $r_1 > b$, car si $n_1 > b$, on a $k = 1$ et $r_1 < b$. On développe ensuite x_1 de la même manière :

$$x_1 + \frac{n_1 (\sqrt{A} + b - r_1)}{A - (b - r_1)^2} = \frac{\sqrt{A} + b - r_1}{n_2} = k_2 + \frac{\sqrt{A} - (b - r_2)}{n_2}$$

$$= k_2 + \frac{1}{x_2}.$$

Il est facile de voir que l'on a eu :

$$A - (b - r_1)^2 = n_1 \left\{ m_1 - k_1 (n_1 k_1 - 2\lambda) \right\} = n_1 n_2$$

le facteur n_2 étant positif, d'un autre côté $x_1 > 1$ entraîne $k_2 \geqq 1$; $r_2 < b$; et $x_2 > 1$, les valeurs étant évidemment toutes positives. En continuant, on obtient :

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} x_2 = k_3 + \dfrac{1}{x_3} = \dfrac{2b - r_2 - r_3}{n_3} + \dfrac{\sqrt{A} - (b - r_3)}{n_3} \\ x_3 = k_4 + \dfrac{1}{x_4} = \dfrac{2b - r_3 - r_4}{n_4} + \dfrac{\sqrt{A} - (b - r_4)}{n_4} \\ \dots\dots\dots \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_{p-1} = k_p + \dfrac{1}{x_p} = \dfrac{2b - r_{p-1} - r_p}{n_p} + \dfrac{\sqrt{A} - (b - r_p)}{n_p} ; \end{array} \right.$$

les facteurs n, sont liés par la relation :

$$(2) \qquad A - (b - r_{p-1})^2 = n_{p-1} . n_p .$$

Pour établir la généralité de ces formules, rappelons que l'on avait : $y > 1$; $k_1 \geqq 1$; $x_1 > 1$; $r_1 < n_1$; $r_1 < b$ toutes ces valeurs étant certainement positives; on avait encore $A - (b - r_1) = n_1 . n_2$. *Si nous admettons que ces relations subsistent pour les éléments d'indices $p - 1$, elles subsistent encore pour les éléments d'indices p, et elles sont par conséquent générales.*

En effet, si nous admettons que l'on ait :

$$A - (b - r_{p-1})^2 = n_{p-1} . n_p$$

avec

$$r_{p-1} < b$$

$$n_{p-1} \text{ positif,}$$

et

$$x_{p-1} > 1 ,$$

nous aurons

$$(3) \quad x_{p-1} = \frac{n_{p-1} (\sqrt{A} + b - r_{p-1})}{A - (b - r_{p-1})^2} = \frac{\sqrt{A} + b - r_{p-1}}{n_p} = \frac{2b - r_{p-1}}{n_p} + \frac{\sqrt{A} - (b - r_p)}{n_p} = k_p + \frac{1}{x_p}$$

et les valeurs positives :

$$n_p < 2b ; \; k_p \geqq 1 ; \; x_p > 1 \text{ et } r_p < b .$$

En outre, nous pourrons écrire :

$$(4) \qquad A - (b - r_p)^2 = n_p \left\{ n_{p-1} - k_{p-1}\,(r_{p-1} - r_p) \right\} = n_p \cdot n_{p-1}$$

avec

$$n_{p+1} \text{ pos.} < 2b.$$

Puisque les conditions admises étaient vraies pour les termes d'indices 1) et 2), elles sont générales, et la formule (3) donne le terme général du développement ; nous pourrons énoncer en outre les remarques suivantes :

a) : Les quotients complets x_1, $x_2 \ldots$, x_p, sont positifs et > 1.

b) : Les quotients incomplets k_1, $k_2 \ldots$, $k_p \ldots$, sont entiers et positifs.

c) : Les diviseurs n_1, $n_2 \ldots$, $n_p \ldots$, sont entiers, positifs et $< 2\,b$.

d) : Les restes sont tous $< b$.

e) : Les restes sont plus petits que le diviseur correspondant et que le diviseur suivant ; c'est-à-dire :

$$r_p < n_p$$

et

$$r_p < n_{p+1}$$

car on peut écrire :

$$A - (b - r_p)^2 = n_{p+1} \cdot n_p = n_1 m_1 + r_p\,(2b - r_p)$$

et

$$n_{p+1} = \frac{n_1 \cdot m_1}{n_p} + r_p \cdot k_p + \frac{r_p \cdot r_{p-1}}{n_p}.$$

Donc

$$n_{p+1} > r_p.$$

Il en résulte donc que l'on a :

$$(5) \qquad y = k_1 + \cfrac{1}{k_2 + \cfrac{1}{k_3 + \ldots}}$$

C'est une fraction continue illimitée. On obtient un résultat analogue en développant y'.

II

Les quotients incomplets sont liés entre eux par une périodicité qui découle des deux théorèmes suivants :