

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 3 (1901)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** NOTE SUR LE DÉVELOPPEMENT DE CERTAINES  
IRRATIONNELLES DE LA FORME  $\frac{\sqrt{A}+M}{P}$  EN  
FRACTIONS CONTINUES

**Autor:** Crelier, L.

**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-4662>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 26.04.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# NOTE SUR LE DÉVELOPPEMENT

## DE CERTAINES IRRATIONNELLES DE LA FORME

$$\frac{\sqrt{A} + M}{P}$$

EN FRACTIONS CONTINUES

### I

Posons :

$$A - \lambda^2 = n_1 m_1,$$

$\lambda$  étant entier inférieur à  $b$  et le plus grand carré parfait contenu dans  $A$ ,  $n_1$  et  $m_1$  étant entiers, positifs et compris tous deux entre  $(b + \lambda)$  et  $(b - \lambda)$ ; puis développons en fractions continues, les irrationnelles :

$$\frac{\sqrt{A} + \lambda}{n_1} = y$$

et

$$\frac{\sqrt{A} + \lambda}{m_1} = y'.$$

On peut poser :

$$y = \frac{b + \lambda}{n_1} + \frac{\sqrt{A} - b}{n_1} = k_1 + \frac{\sqrt{A} - (b - r_1)}{n_1} = k_1 + \frac{1}{x_1};$$

on avait  $y > 1$ , il en résulte  $k_1 \geq 1$  et  $x_1 > 1$ , et ces trois valeurs sont évidemment positives.

Le reste de la première division,  $r_1$  donne :

$$b + \lambda - n_1 k_1 = r_1,$$

et l'on a  $r_1 < n_1$  et  $r_1 > b$ , car si  $n_1 > b$ , on a  $k_1 = 1$  et  $r_1 < b$ . On développe ensuite  $x_1$  de la même manière :

$$\begin{aligned} x_1 + \frac{n_1 (\sqrt{A} + b - r_1)}{A - (b - r_1)^2} &= \frac{\sqrt{A} + b - r_1}{n_2} = k_2 + \frac{\sqrt{A} - (b - r_2)}{n_2} \\ &= k_2 + \frac{1}{x_2}. \end{aligned}$$

Il est facile de voir que l'on a eu :

$$A - (b - r_1)^2 = n_1 \{ m_1 - k_1 (n_1 k_1 - 2\lambda) \} = n_1 n_2$$

le facteur  $n_2$  étant positif, d'un autre côté  $x_1 > 1$  entraîne  $k_2 \geq 1$  ;  $r_2 < b$  ; et  $x_2 > 1$ , les valeurs étant évidemment toutes positives.

En continuant, on obtient :

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} x_2 = k_3 + \frac{1}{x_3} = \frac{2b - r_2 - r_3}{n_3} + \frac{\sqrt{A} - (b - r_3)}{n_3} \\ x_3 = k_4 + \frac{1}{x_4} = \frac{2b - r_3 - r_4}{n_4} + \frac{\sqrt{A} - (b - r_4)}{n_4} \\ \dots \dots \dots \\ x_{p-1} = k_p + \frac{1}{x_p} = \frac{2b - r_{p-1} - r_p}{n_p} + \frac{\sqrt{A} - (b - r_p)}{n_p} ; \end{array} \right.$$

les facteurs  $n$ , sont liés par la relation :

$$(2) \quad A - (b - r_{p-1})^2 = n_{p-1} \cdot n_p.$$

Pour établir la généralité de ces formules, rappelons que l'on avait :  $y > 1$  ;  $k_1 \geq 1$  ;  $x_1 > 1$  ;  $r_1 < n_1$  ;  $r_1 < b$  toutes ces valeurs étant certainement positives ; on avait encore  $A - (b - r_1)^2 = n_1 \cdot n_2$ . Si nous admettons que ces relations subsistent pour les éléments d'indices  $p - 1$ , elles subsistent encore pour les éléments d'indices  $p$ , et elles sont par conséquent générales.

En effet, si nous admettons que l'on ait :

$$A - (b - r_{p-1})^2 = n_{p-1} \cdot n_p$$

avec

$$r_{p-1} < b$$

$$n_{p-1} \text{ positif,}$$

et

$$x_{p-1} > 1,$$

nous aurons

$$(3) \quad x_{p-1} = \frac{n_{p-1} (\sqrt{A} + b - r_{p-1})}{A - (b - r_{p-1})^2} = \frac{\sqrt{A} + b - r_{p-1}}{n_p} = \frac{2b - r_{p-1}}{n_p} + \frac{\sqrt{A} - (b - r_p)}{n_p} = k_p + \frac{1}{x_p}$$

et les valeurs positives :

$$n_p < 2b ; k_p \geq 1 ; x_p > 1 \text{ et } r_p < b.$$

En outre, nous pourrions écrire :

$$(4) \quad A - (b - r_p)^2 = n_p \{ n_{p-1} - k_{p-1} (r_{p-1} - r_p) \} = n_p \cdot n_{p-1}$$

avec

$$n_{p+1} \text{ pos. } < 2b.$$

Puisque les conditions admises étaient vraies pour les termes d'indices 1) et 2), elles sont générales, et la formule (3) donne le terme général du développement; nous pourrions énoncer en outre les remarques suivantes :

a) : Les quotients complets  $x_1, x_2, \dots, x_p$ , sont positifs et  $> 1$ .

b) : Les quotients incomplets  $k_1, k_2, \dots, k_p, \dots$ , sont entiers et positifs.

c) : Les diviseurs  $n_1, n_2, \dots, n_p, \dots$ , sont entiers, positifs et  $< 2b$ .

d) : Les restes sont tous  $< b$ .

e) : Les restes sont plus petits que le diviseur correspondant et que le diviseur suivant; c'est-à-dire :

$$r_p < n_p$$

et

$$r_p < n_{p+1}$$

car on peut écrire :

$$A - (b - r_p)^2 = n_{p+1} \cdot n_p = n_1 m_1 + r_p (2b - r_p)$$

et

$$n_{p+1} = \frac{n_1 \cdot m_1}{n_p} + r_p \cdot k_p + \frac{r_p \cdot r_{p-1}}{n_p}$$

Donc

$$n_{p+1} > r_p$$

Il en résulte donc que l'on a :

$$(5) \quad y = k_1 + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} + \dots$$

C'est une fraction continue illimitée. On obtient un résultat analogue en développant  $y'$ .

## II

Les quotients incomplets sont liés entre eux par une périodicité qui découle des deux théorèmes suivants :

THÉORÈME I. Si dans le développement de  $y$ , on rencontre deux diviseurs  $n_\mu \cdot n_{\mu+1}$ , tels que

$$\begin{aligned} n_\mu &= n_\lambda \\ n_{\mu+1} &= n_{\lambda-1} \end{aligned}$$

$n_{\lambda-1} \cdot n_\lambda$  étant un produit précédemment obtenu, tous les diviseurs qui suivent  $n_{\mu+1}$  sont la répétition dans l'ordre inverse des diviseurs qui précèdent  $n_{\lambda-1}$ .

La même loi régit les quotients incomplets.

On déduit :

$$n_\mu \cdot n_{\mu+1} = n_\lambda \cdot n_{\lambda-1},$$

puis d'après (2)

$$r_{\lambda-1} = r_\mu.$$

Ceci donne :

$$\frac{2b - r_{\lambda-1}}{n_{\lambda-1}} = k_{\lambda-1} \text{ reste } r_{\lambda-2} \text{ (Voy. remarque e).}$$

$$\frac{2b - r_\mu}{n_{\mu+1}} = k_{\mu+1} \text{ reste } r_{\mu+1} \text{ (Voy. remarque e).}$$

Donc

$$k_{\lambda-1} = k_{\mu+1}$$

et

$$r_{\mu+1} = r_{\lambda-2}.$$

En appliquant le même raisonnement aux termes qui précèdent, soit :

$$\frac{2b - r_{\lambda-1}}{n_\lambda} = k_\lambda \text{ reste } r_\lambda$$

$$\frac{2b - r_\mu}{n_\mu} = k_\mu \text{ reste } r_{\mu-1}$$

puis en continuant dans les deux directions, on arrive évidemment aux tableaux de récurrence suivants :

$$(6) \left\{ \begin{array}{l} \dots \dots \dots \\ n_{\lambda+1} = n_{\mu-1} \\ n_\lambda = n_\mu \\ n_{\lambda-1} = n_{\mu+1} \\ n_{\lambda-2} = n_{\mu+2} \\ \dots \dots \dots \end{array} \right. \left| \begin{array}{l} \dots \dots \dots \\ k_{\lambda+1} = k_{\mu-1} \\ k_\lambda = k_\mu \\ k_{\lambda-1} = k_{\mu+1} \\ \dots \dots \dots \end{array} \right. \left. \begin{array}{l} \dots \dots \dots \\ r_{\lambda+1} = r_{\mu-2} \\ r_\lambda = r_{\mu-1} \\ r_{\lambda-1} = r_\mu \\ r_{\lambda-2} = r_{\mu+1} \\ \dots \dots \dots \end{array} \right.$$

C. q. f. d.

I. COROLLAIRE. — Si l'on a une fois deux diviseurs consécutifs égaux :

$$n_p = n_{p+1},$$

la symétrie s'établit à partir de ces termes.

On peut alors poser :

$$\frac{2b - r_p}{n_p} = k_p \text{ reste } r_{p-1} \text{ (Voy. e).}$$

$$\frac{2b - r_p}{n_{p+1}} = k_{p+1} \text{ reste } r_{p+1} \text{ (Voy. e).}$$

D'où :

$$k_p = k_{p+1}$$

et

$$r_{p-1} = r_{p+1}.$$

Cette dernière égalité donne :

$$n_{p-1} = n_{p+2}$$

et

$$n_p = n_{p+1}.$$

On retombe alors dans le théorème I, et la symétrie est établie. C. q. f. d.

II. COROLLAIRE. — Si l'on a :

$$n_{p-1} = n_{p+1},$$

cette relation entraîne la symétrie des termes.

Dans ce cas, la formule (3) donne :

$$n_{p+1} = n_{p-1} - k_p (r_{p-1} - r_p);$$

il en résulte :

$$r_{p-1} = r_p$$

puis :

$$\frac{2b - r_{p-1}}{n_{p-1}} = k_{p-1} \text{ reste } r_{p-2},$$

$$\frac{2b - r_p}{n_{p+1}} = k_{p+1} \text{ reste } r_{p+1}.$$

Les quotients et les restes sont égaux, et l'on en tire :

$$n_{p-2} \cdot n_{p-1} = n_{p+1} \cdot n_{p+2},$$

relation qui nous ramène à un cas particulier du théorème I.

C. q. f. d.

THÉORÈME II. — Si dans le développement de  $y$ , on trouve un produit  $n_\mu \cdot n_{\mu+1}$ , tel que l'on ait :

$$\begin{aligned} n_\mu &= n_\lambda \\ n_{\mu+1} &= n_{\lambda+1} \end{aligned}$$

ou  $n_\lambda \cdot n_{\lambda+1}$  est un produit précédemment obtenu, les valeurs  $n_\mu$  et  $n_{\mu+1}$ , font partie d'une période qui est la répétition de celle à laquelle appartiennent les diviseurs  $n_\lambda$  et  $n_{\lambda+1}$ , et cette période commence avec le premier diviseur.

Les quotients incomplets suivent la même loi.

Ces valeurs donnent d'abord :

$$r_\lambda = r_\mu,$$

desquels on déduit comme précédemment

$$k_\mu = k_\lambda$$

puis

$$r_{\lambda-1} = r_{\mu-1}$$

ou

$$k_{\mu+1} = k_{\lambda+1}$$

et

$$r_{\mu+1} = r_{\lambda+1}.$$

En continuant comme au théorème I, on arrive à établir des tableaux de récurrence qui remontent évidemment jusqu'aux premiers termes employés :

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \dots \dots \dots \\ k_{\lambda-1} = k_{\mu-1} \\ k_\lambda = k_\mu \\ k_{\lambda+1} = k_{\mu+1} \\ \dots \dots \dots \end{array} \right.$$

On forme de la même manière des tableaux analogues avec les diviseurs  $n$  et les restes  $r$ .

C. q. f. d.

THÉORÈME III. — Les valeurs  $y = \frac{\sqrt{A} + \lambda}{n_1}$  et  $y' = \frac{\sqrt{A} + \lambda}{m_1}$ , déduites de  $A = \gamma^2 = n_1 \cdot m_1$  et toutes deux  $\geq 1$  donnent des fractions continues périodiques simples.

En effet, supposons formé le tableau des restes  $A - \lambda^2$ , décomposés en produits de deux facteurs  $< 2b$ , de toutes les manières possibles. Le calcul des termes conduit d'un produit à un autre d'après la formule (2), et comme ils sont en nombre limité, on retrouvera une fois un diviseur  $n_\lambda$  égal à un autre  $n_\mu$  déjà obtenu, sans avoir de produit nouveau permettant de continuer le développement.

On devra donc recourir aux produits

$$n_\mu \cdot n_{\mu+1} \tag{\alpha}$$

ou

$$n_\mu \cdot n_{\mu-1} \tag{\beta}$$

Le produit  $(\alpha)$ , d'après le théorème II, donne une répétition portant sur tous les termes depuis le premier. Si la rencontre a lieu pour la première fois, il faut donc que les termes  $n_\mu$  ou  $n_\lambda$  soient égaux au premier. On obtient dans ce cas, une fraction continue périodique simple, car d'après le même théorème, le  $(p + 1)^{\text{e}}$  terme de la 2<sup>e</sup> réduite est égal au  $(p + 1)^{\text{e}}$  de la 1<sup>re</sup>, et au 1<sup>er</sup> de la 2<sup>e</sup>, si  $p$  est le nombre des termes de la période, c'est donc la 3<sup>e</sup> période qui commence et ainsi de suite.

Le produit  $(\beta)$  entraînerait, d'après le théorème I, une symétrie qui suppose une répétition de termes antérieure.

Si le terme ou le développement est arrêté *pour la première fois* n'est pas égal au premier, on ne peut continuer le développement, d'après le théorème II, qu'en prenant le dernier produit comme produit nouveau, ce qui suppose :

$$n_{\mu+1} = n_{\mu-1} \tag{\gamma}$$

Le corollaire II montre que la suite des termes est symétrique avec première partie.

Au cas où l'on aurait eu :

$$n_\mu = n_{\mu-1} \tag{\delta}$$

le développement continue d'après le corollaire I en formant également une symétrie.

Dans ces deux dernières alternatives, la suite des termes est encore arrêtée comme précédemment, mais on retombe dans l'une des alternatives  $(\gamma)$  ou  $(\delta)$ , car un produit de la forme  $(\alpha)$  entraî-

nerait quand même une symétrie d'après le théorème I. Soit A le 1<sup>er</sup> terme et A' le 2<sup>e</sup>; on a eu A' pour le  $(\lambda - 1)^e$  puis A pour le  $\lambda^e$ , si à partir du  $(p)^e$  terme on retrouve A pour le  $(p + 1)^e$ , puis A' pour le  $(p + 2)^e$ , c'est qu'il y a symétrie entre le  $\lambda^e$  et le  $p^e$  (Théorème I).

Il résulte de ceci, que la fonction continue est périodique simple, sans symétrie ou avec une symétrie double.

La symétrie peut se représenter schématiquement comme suit :

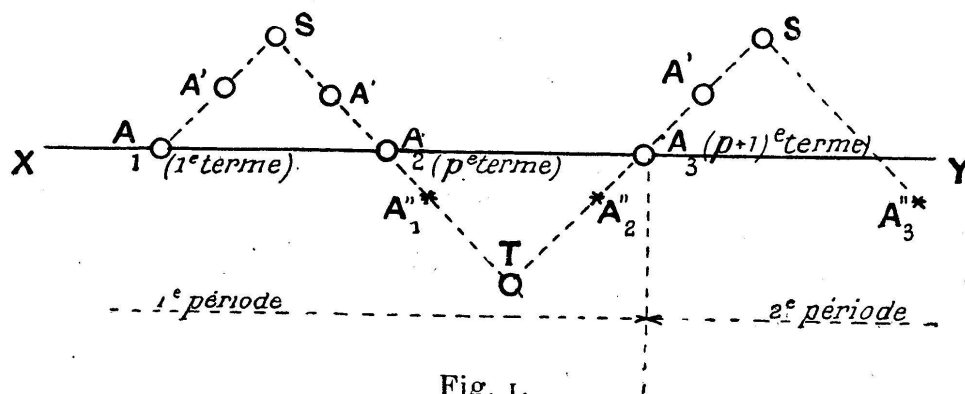


Fig. 1.

Le point S sera le premier sommet de la symétrie résultant de  $(\gamma)$  ou  $(\delta)$ , et T sera le sommet formé au second arrêt du développement.

**THÉORÈME IV.** — *Les quotients incomplets de  $y'$  sont formés par ceux de  $y$ , puis dans l'ordre inverse.*

Soit  $p$  le nombre des quotients incomplets ; les éléments de la 2<sup>e</sup> période donnent :

$$k_1 = k_{p+1}; k_2 = k_{p+2},$$

et de même pour les valeurs  $n$  et  $r$  (Théorème II).

On a :

$$x_{p-1} = k_p + \frac{\sqrt{A} - (b - r_p)}{n_p} = k_p + \frac{1}{x_p},$$

mais, à cause de la périodicité,

$$\dots x_p = y.$$

Donc

$$x_p = y = \frac{\sqrt{A} + b - r_p}{n_{p-1}} = \frac{\sqrt{A} + \lambda}{n_1}$$

et

$$b - r_p = \lambda.$$

Il en résulte

$$n_p = m_1.$$

et

$$y' = \frac{\sqrt{A} + b - r_p}{n_p} = k_p + \frac{1}{x_1'},$$

$$x_1' = \frac{\sqrt{A} + b - r_{p-1}}{n_{p-1}} = k_{p-1} + \frac{1}{x_2'},$$

.....

$$x'_{p-1} = \dots = k_1 + \frac{1}{y'}.$$

Cette propriété des derniers éléments nous donne donc les quotients incomplets de  $y'$  d'après ceux de  $y$  et l'on a :

$$(8) \quad y = k_1 + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} + \dots + \frac{1}{k_p} + \frac{1}{y}$$

$$(9) \quad y' = k_p + \frac{1}{k_{p-1}} + \dots + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_1} + \frac{1}{y'}$$

C. q. f. d.

On peut observer que le dernier quotient  $k_p$  marqué  $A''_2$  au schéma d'une symétrie se retrouve en  $A''_1$  et que c'est en ce point que commencerait la 2<sup>e</sup> fraction, la première commençant en  $A_1$  sur l'axe  $x y$  (1).

### III

Du développement des irrationnelles précédentes, on déduit celui des valeurs :

$$z = \frac{\sqrt{A} - \lambda}{n_1}$$

et

$$z' = \frac{\sqrt{A} - \lambda}{m_1}$$

(1) Voir *Comptes rendus*, n° 4, t. CXXVIII, L. Crelier.

$n_1$  et  $m_1$  étant liées par les mêmes relations que précédemment.

On a :

$$z < 1$$

et

$$z' < 1$$

ou

$$(10) \quad z = \frac{\sqrt{A} - \lambda}{n_1} = \frac{1}{\frac{n_1}{\sqrt{A} - \lambda}} = \frac{1}{\frac{m_1}{\sqrt{A} - \lambda}} = \frac{1}{y'}$$

et de même

$$(11) \quad z' = \frac{1}{y}$$

*Les irrationnelles  $z$  et  $z'$  suivent la même loi que  $y$  et  $y'$ .*

#### IV

Considérons maintenant des irrationnelles telles que

$$(12) \quad t_1 = \frac{\sqrt{A} + \lambda}{n_1}; \quad t_2 = \frac{\sqrt{A} + \lambda}{m_1}; \quad t_3 = \frac{\sqrt{A} - \lambda}{n_1}; \quad t_4 = \frac{\sqrt{A} - \lambda}{m_1},$$

où  $A - \lambda^2 = n_1 \cdot m_1$ , mais un des facteurs,  $n_1$  par exemple, donne :

$$\sqrt{A} + \lambda < n_1.$$

Il en résulte

$$m_1 < \sqrt{A} - \lambda.$$

On a alors :

$$t_1 < 1, \quad t_2 > 1, \quad t_3 < 1, \quad t_4 > 1.$$

L'étude de ces valeurs donne :

$$t_1 = \frac{1}{t_4}$$

et

$$t_3 = \frac{1}{t_2}$$

D'autre part

$$t_4 = l + \frac{\sqrt{A} - (b - r)}{m_1} = l' + \frac{1}{x_1}.$$

Mais  $x_1 = \frac{\sqrt{A} + b - r}{m_2}$ , car il est facile de développer l'équation

$A - (b - r^2) = m_1 \cdot m_2$ , en procédant comme dans (4). En outre  $x_1 > 1$ , et l'irrationnelle  $\frac{\sqrt{A} + b - r}{m_2}$  est de la forme  $y$  ou  $y'$ , car  $m_1$  et  $m_2$  sont inférieurs  $\sqrt{A} + b - r$ .

Le développement de  $t_3$  entraîne

$$t_2 = l' + \frac{\sqrt{A} + (b - r')}{m_1} = l' + \frac{1}{x_1'}$$

Ici encore, il est facile de voir que l'irrationnelle  $x_1$  est de la forme  $y$  ou  $y'$ . D'où il suit que :

*Les irrationnelles  $t_1, t_2, t_3, t_4$ , se développent en fractions continues périodiques mixtes, plus petites ou plus grandes que l'unité. La partie irrégulière ne comprend qu'un seul quotient incomplet.*

On peut remarquer que, pour deux irrationnelles comme

$$t_2 = \frac{\sqrt{A} + \lambda}{m_1}$$

et

$$t_4 = \frac{\sqrt{A} - \lambda}{m_1}$$

toutes deux supérieures à l'unité, les parties périodiques sont identiques dès que l'on a  $2\lambda$  divisible par  $m_1$ .

### V

Nous avons vu des irrationnelles dépendant de  $\lambda^2 < A$ . On peut aussi en construire avec  $\lambda^2 > A$ .

Posons :

$$\lambda^2 - A = n_1 m_1.$$

Il en résulte des valeurs comme :

$$(13) \quad V_1 = \frac{\lambda \pm \sqrt{A}}{n_1}$$

et

$$V_2 = \frac{\lambda \pm \sqrt{A}}{m_1}$$

Ces irrationnelles peuvent être plus grandes ou plus petites que l'unité suivant que les valeurs  $n_1$  et  $m_1$  sont comprises entre  $\lambda + \sqrt{A}$  et  $\lambda - \sqrt{A}$ , ou en dehors de ces valeurs. Les valeurs inférieures à l'unité se ramènent évidemment à l'inverse des valeurs supérieures.

Étudions une de ces dernières, soit :  $V_1 > 1$  et

$$V_1 = \frac{\lambda + \sqrt{A}}{n_1}.$$

On a :

$$V_1 = \frac{\lambda + b - r}{n_1} + \frac{\sqrt{A} - b + r_1}{n_1} = p_1 + \frac{(r_1 - b) + \sqrt{A}}{n_1} = p_1 + \frac{1}{x_1}.$$

Le reste  $r$  peut être évidemment plus grand que  $b$ .

On a encore :

$$x_1 = \frac{(r_1 - b) - \sqrt{A}}{n_2} = p_2 + \frac{(r_2 + b) - \sqrt{A}}{n_2} = \frac{1}{x_2}$$

$$x_2 = \frac{(r_2 + b) - \sqrt{A}}{n_3} = p_3 + \frac{1}{x_3}$$

car

$$(r_1 - b)^2 - A = n_1 \cdot n_2$$

et

$$(14) \quad (r_k - b)^2 - A = n_k \cdot n_{k+1}.$$

La première formule et la généralisation s'établissent comme pour la formule (4).

Le terme général prend la forme :

$$x_k = \frac{(r_k - b) - \sqrt{A}}{n_{k+1}}$$

$$x_{k+1} = \frac{(r_{k+1} + b) + \sqrt{A}}{n_{k+2}}$$

$$x_{k+2} = \frac{(r_{k+2} - b) - \sqrt{A}}{n_{k+3}}.$$

Il est à remarquer que les valeurs  $(r_k - b)$ ,  $(r_{k+1} + b)$  et  $(r_{k+2} - b)$  vont en diminuant. En effet :

$$r_{k+1} = r_k - 2b - p_{k+1} \cdot n_{k+1}.$$

Donc

$$r_{k+1} + b = (r_k - b) - p_{k+1} \cdot n_{k+1}.$$

En outre,

$$r_{k+2} = r_{k+1} + 2b - p_{k+2} \cdot n_{k+2}$$

et

$$r_{k+2} - b = (r_{k+1} + b) - p_{k+2} \cdot n_{k+2}.$$

C. q. f. d.

On arrivera donc une fois à une valeur

$$x_\lambda = \frac{M + \sqrt{A}}{n_{\lambda+1}}, \text{ telle que } M < b.$$

Cette valeur donnera :

$$x_{\lambda+1} = \frac{\sqrt{A} + (b - r_{\lambda+1})}{n_{\lambda+2}},$$

une irrationnelle de la forme  $y$  ou  $y'$  qui se développe en fraction continue périodique simple, car  $n_{\lambda+1} < 2b$ ,

$$r_{\lambda+1} < b$$

et

$$x_{\lambda+1} > 1.$$

Le radical  $\sqrt{A}$  dans  $x_\lambda$  ne saurait être négatif, car il entraînerait une irrationnelle négative, ce qui est impossible, et le raisonnement subsiste pour

$$V_1 = \frac{\lambda - \sqrt{A}}{n_1}.$$

Il en résulte la loi suivante :

*Les irrationnelles de la forme  $V_1 = \frac{\lambda \pm \sqrt{A}}{n_1}$  ou  $V_2 = \frac{\lambda \pm \sqrt{A}}{m_1}$  se développant en fractions continues périodiques mixtes ; la partie irrégulière a un nombre indéterminé mais limité de quotients incomplets.*

## VI

Ces théories appliquées aux racines des équations du 2<sup>e</sup> degré nous conduisent à une forme nouvelle plus complète du théorème de Lagrange.

Prenons les équations à coefficients entiers

$$ax^2 \pm bx - c = 0$$

et

$$ax_2 \pm bx + c = 0.$$

Les racines de la 1<sup>re</sup> sont :

$$x' = \frac{\mp b + \sqrt{b^2 + 4ac}}{2a} \quad x'' = \frac{\mp b - \sqrt{b^2 + 4ac}}{2a}$$

On a  $A = b^2 - 4ac$  ; en faisant  $\lambda = b$ ,  $2a = m$ ;  $2c = n$ , on écrit :

$$x_1' = \frac{\sqrt{A} - \lambda}{m}$$

et

$$x_2' = \frac{\sqrt{A} + \lambda}{m}$$

$$x_1'' = -\frac{\sqrt{A} + \lambda}{m} \quad x_2'' = -\frac{\sqrt{A} - \lambda}{m}$$

On voit donc que, si les deux racines d'une équation sont toutes deux en valeur absolue plus grandes ou plus petites que l'unité, ces irrationnelles sont de la forme  $t$ . Elles seront de la forme  $y$  ou  $z$ , si une des racines est en valeur absolue plus grande que 1, tandis que l'autre est plus petite.

Les racines de la seconde équation sont :

$$x' = \frac{\mp b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

et

$$x'' = \frac{\mp b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Avec la substitution, on trouve

$$x_3' = -\frac{\lambda - \sqrt{A}}{m}, \quad x_4' = \frac{\lambda + \sqrt{A}}{m},$$

$$x_3'' = -\frac{\lambda + \sqrt{A}}{m}, \quad x_4'' = \frac{\lambda - \sqrt{A}}{m},$$

Les racines sont toutes de la forme V.

**THÉORÈME.** — *Toute équation du deuxième degré à coefficients entiers, dont les racines sont réelles et irrationnelles donne pour ces racines deux fractions continues périodiques.*

*Elles sont périodiques mixtes, de même signe, avec partie irrégulière indéterminée, mais limitée quand c est positif.*

*Elles sont périodiques mixtes, de signes contraires, avec un seul quotient incomplet à la partie irrégulière quand c est négatif et quand les valeurs absolues des racines sont toutes deux plus grandes que 1, ou plus petites que 1.*

*Elles sont périodiques simples et de signes contraires quand c est négatif et quand la valeur absolue d'une des racines est supérieure à l'unité alors que la valeur absolue de l'autre est inférieure à l'unité.*

*Dans ce cas, la période de l'une est formée des quotients incomplets de l'autre pris dans l'ordre renversé.*

## VII

Ces irrationnelles permettent de donner également une nouvelle démonstration du développement de Legendre pour les racines carrées des nombres entiers.

Soit à développer  $\sqrt{A}$  : Nous poserons :

$$A - b^2 = n_1 \cdot 1.$$

$b^2$  étant le plus carré parfait.

Les irrationnelles  $\frac{\sqrt{A} + b}{1}$  et  $\frac{\sqrt{A} + b}{n}$  seront de la forme  $y$  et  $y'$  et nous aurons :

$$(\alpha) \quad \frac{\sqrt{A} + b}{1} = 2b + \frac{\sqrt{A} + b}{1} = 2b + \frac{1}{\frac{\sqrt{A} + b}{n}}.$$

La période correspondant à la 1<sup>re</sup> irrationnelle s'écrira

$$y = \frac{\sqrt{A} + b}{1} = [2b, b_1, b_2, \dots, b_{p-1}, b_p; 2b, \dots].$$

Celle correspondant à la 2<sup>e</sup>, s'écrira par raison de symétrie

$$y' = \frac{\sqrt{A} + b}{n} = [b_p, b_{p-1}, \dots, b_2, b_1, 2b; b_p \dots].$$

Mais il est à remarquer, que le premier terme de  $y'$  est le deuxième de  $y$ , ( $\alpha$ ), et ainsi de suite; on aura donc, à cause de la symétrie connue de ces irrationnelles

$$y = \sqrt{A} + b = [2b, b_1, b_2, \dots, b_2, b_1; 2b, \dots]$$

et

$$\sqrt{A} = [b, b_1, b_2, \dots, b_2, b_1, 2b; b_1, b_2, \dots],$$

développement donné par Legendre (1).

*Remarque.* — Le second sommet de la symétrie dans ce développement ne peut être formé de deux quotients incomplets égaux qu'au cas où  $A$  est décomposable en une somme de deux carrés parfaits différents et plus grands que 1.

## VIII

Si  $p$  est le nombre des quotients incomplets de la période de  $y$  et  $\frac{P_p}{Q_p}$  la partie réduite de ladite fraction continue, on a :

$$y = \frac{P_p y + P_{p-1}}{Q_p y + Q_{p-1}}$$

et

$$y' = \frac{P_p y' + Q_p}{P_{p-1} y' + Q_{p-1}}$$

Les valeurs  $y$  et  $-\frac{1}{y'}$ , sont les racines de l'équation :

$$n \chi^2 - 2\lambda \chi - m = 0,$$

ou de l'équation

$$Q_p \chi^2 + (Q_{p-1} - P_p) \chi - Q_p = 0.$$

La proportionnalité des coefficients donne :

$$\begin{aligned} nB &= Q_p \\ -2\lambda B &= Q_{p-1} = -P_p \\ mB &= P_{p-1} \end{aligned}$$

(1) LEGENDRE. *Théorie des nombres.*

En tenant compte de la relation bien connue :

$$P_p \cdot Q_{p-1} - P_{p-1} \cdot Q_p = \pm 1,$$

on peut former l'équation

$$Q_{p-1}^2 + 2\lambda B Q_{p-1} - (A - \lambda^2) B^2 \mp 1 = 0,$$

qui, résolue en  $Q_{p-1}$ , donne :

$$Q_{p-1} = -\lambda B + \sqrt{AB^2 \pm 1}$$

où l'on a

$$B = \frac{Q_p}{n} = \frac{P_{p-1}}{m}.$$

On aurait trouvé de même

$$P_p = \lambda B + \sqrt{AB^2 \pm 1}.$$

Comme ces valeurs doivent être des nombres entiers, on en déduit que la quantité sous le radical est un carré parfait ; ce qui donne lieu au théorème suivant de la théorie des nombres.

THÉORÈME. — *Etant donné un nombre A non carré parfait il existe un ou plusieurs nombres entiers B, tels que l'on a  $A \cdot B^2 \pm 1$  carré parfait.*

Il faut remarquer qu'au nombre A correspondent un nombre limité d'irrationnelles  $y$ , et par conséquent aussi un nombre limité de valeurs B.

L. CRELIER (Bienne).

---

## SUR LA DÉMONSTRATION DU THÉORÈME DE TAYLOR

---

I. — M. Hatzidakis (Athènes) a donné dans cette revue (II, p. 447) un article très intéressant sur une démonstration simplifiée de la formule de Taylor. Cependant trois inconvénients m'inspirent des scrupules :