

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 3 (1901)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** SUR UNE VARIATION ÉLÉMENTAIRE  
**Autor:** Greenhill, A. G.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-4660>

#### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 19.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

l'intermédiaire de ce dernier que le gramme dérive du mètre. Ne vaut-il pas mieux mettre l'are dans la même colonne que le décamètre et mettre le centiare dans celle du mètre, puisque le centiare est un mètre carré et l'are un décamètre carré ?

On obtiendrait ainsi un tableau dans le genre de celui qui précède et qu'il faudrait faire étudier aux élèves par de fréquentes reproductions de mémoire, soit sur papier, soit sur le tableau noir.

On trouvera peut-être qu'il y a dans ce tableau des choses inutiles ; mais chaque maître ou chaque auteur d'arithmétique est libre d'en prendre ce qu'il jugera utile à ses élèves et d'en laisser le reste. De plus, ce tableau n'a pas seulement pour but de donner une idée de la dépendance réciproque des mesures du système décimal, y compris la division centésimale du quart du méridien terrestre ; il a encore celui de donner aux élèves une idée pour ainsi dire matérielle des très grands et très petits nombres.

N'est-il pas intéressant, par exemple, de voir sur ce tableau que la seconde centésimale est l'angle que font entre eux deux peupliers voisins plantés sur une route ?

Quant aux anciens tableaux synoptiques, je crois qu'ils avaient moins pour but de faciliter l'étude du système métrique, que celui d'en faire voir la beauté et la symétrie, et, ce but-là, chacun dira qu'ils l'ont parfaitement atteint.

CH. BERDELLÉ (Rioz, Haute-Saône).

---

## SUR UNE VARIATION ÉLÉMENTAIRE

---

Je m'attendais à une vive discussion au sujet de la question soulevée par M. Brocard dans *l'Enseignement Mathématique* (t. III, n° 1, p. 59-60) à propos de l'utilité de l'étude de la variation de la fonction

$$(1) \quad y = \frac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'}$$

ou, comme nous préférions l'écrire,

$$(2) \quad y = \frac{N}{D},$$

où

$$(3) \quad N = ax^2 + 2bx + c, \quad D = Ax^2 + 2Bx + C.$$

Bien que chez nous, en Angleterre, cette fonction n'ait pas encore été l'objet d'une considération spéciale de nature à lui faire prendre place dans nos programmes mathématiques, il y a des symptômes d'un commencement. Elle présente notamment un grand avantage au sujet de l'intérêt algébrique et de la variété des applications au Calcul intégral. C'est la première introduction à la substitution du second ordre. Elle est utile aussi comme exercice à l'emploi du papier quadrillé si fortement recommandé par le professeur Perry dans ses *Lectures on Practical Mathematics*.

C'est donc avec beaucoup de surprise que nous avons lu la proposition de M. Brocard déclarant que l'étude de cette fonction devrait être abandonnée, ou, tout au moins, reléguée au second plan dans un cours de mathématiques élémentaires.

L'intérêt algébrique résulte de la discussion de l'équation du second degré contenue dans une autre, obtenue lorsque  $x$  est déterminé en fonction de  $y$  par la solution de l'équation

$$(4) \quad (Ay - a)x^2 + 2(By - b)x + Cy - c = 0,$$

sous la forme

$$(5) \quad x = \frac{-By + b + \sqrt{(By - b)^2 - (Ay - a)(Cy - c)}}{Ay - a}.$$

Maintenant les valeurs limites de  $y$  sont déterminées par l'équation du second degré.

$$(6) \quad (By - b)^2 - (Ay - a)(Cy - c) = 0$$

ou

$$(7) \quad \frac{Ay - a}{By - b} = \frac{By - b}{Cy - c},$$

et alors

$$(8) \quad x = \frac{-By + b}{Ay - a} = \frac{Cy - c}{-By + b},$$

ou

$$(9) \quad y = \frac{ax + b}{Ax + B} = \frac{bx + c}{Bx + C};$$

de sorte que

$$(10) \quad (ax + b)(Bx + C) - (Ax + B)(bx + c) = 0,$$

$$(11) \quad (aB - Ab)x^2 + (aC - Ac)x + bC - Bc = 0.$$

Voici le premier exemple en Algèbre d'une substitution bili-néaire comme dans (9) changeant l'équation du second degré (6) en l'équation du second degré (11).

Les racines de (6) et de (11) sont imaginaires seulement lorsque les racines de (3)

$$(12) \quad N = 0 \quad \text{et} \quad D = 0$$

sont entrelacées, ainsi qu'on le voit graphiquement par le tracé de la courbe (2) sur papier quadrillé.

Dans tous les autres cas, les racines de (6) et de (11) sont réelles ; et, en les désignant par  $y_1$ ,  $y_2$ , et  $x_1$ ,  $x_2$  ( $y_1$ , étant le maximum et  $y_2$  le minimum de  $y$ ) on a

$$(13) \quad y_1 - y = \frac{(Ay_1 - a)x^2 + 2(By_1 - b)x + Cy_1 - c}{D},$$

expression dont le numérateur est un carré en vertu de (6) ; de sorte que

$$(14) \quad y_1 - y = \frac{(Ay_1 - a)(x - x_1)^2}{D},$$

et, de la même manière

$$(15) \quad y - y_2 = \frac{(a - Ay_2)(x - x_2)^2}{D}.$$

Donc

$$(16) \quad N - y_2 D = (a - Ay_2)(x - x_2)^2,$$

$$(17) \quad - N + y_1 D = (Ay_1 - a)(x - x_1)^2;$$

de sorte que

$$(18) \quad N = p(x - x_1)^2 + q(x - x_2)^2$$

$$(19) \quad D = P(x - x_1)^2 + Q(x - x_2)^2;$$

où

$$(20) \quad P = \frac{Ay_1 - a}{y_1 - y_2}, \quad Q = \frac{a - Ay_2}{y_1 - y_2},$$

$$(21) \quad p = y_2 P, \quad q = y_1 Q.$$

De là

$$(22) \quad \begin{cases} ax + b = p(x - x_1) + q(x - x_2), \\ bx + c = -px_1(x - x_1) - qx_1(x - x_2); \end{cases}$$

$$(23) \quad \begin{cases} Ax + B = P(x - x_1) + Q(x - x_2), \\ Bx + C = -Px_1(x - x_1) - Qx_2(x - x_2); \end{cases}$$

et une variété d'autres relations pouvant être obtenues, à titre d'exercices, en Algèbre élémentaire.

Si le professeur désire préparer des exemples numériques conduisant à des résultats rationnels simples, il a seulement à former les expressions pour  $N$  et  $D$  en assignant des valeurs entières simples à  $x_1, x_2, p, q, P, Q$ .

Ainsi, par exemple, pour

$$x_1 = 1, x_2 = 2, p = 1, q = 2, P = 2, Q = 3$$

on a

$$(24) \quad y = \frac{N}{D} = \frac{3x^2 - 10x + 9}{5x^2 - 16x + 14}.$$

J'ai déjà fait ressortir, dans le compte rendu du *Traité d'Analyse* de M. Appell (*l'Ens. math.*, 1<sup>re</sup> année, p. 66-72), l'utilité de la substitution (1) ou (2) pour la réduction de l'intégrale

$$(25) \quad \int \frac{Hx + K}{Ax^2 + 2Bx + C} \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + 2bx + c}};$$

l'intégrale se sépare tout de suite en deux intégrales simples de la forme

$$(26) \quad \int \frac{dy}{\sqrt{y(y-y_1)}} = -\cos^{-1} \sqrt{\frac{y}{y_1}}, \text{ ou } \sin^{-1} \sqrt{\frac{y}{y_1}},$$

et

$$(27) \quad \int \frac{dy}{\sqrt{y(y-y_2)}} = ch^{-1} \sqrt{\frac{y}{y_2}}, \text{ ou } Sh^{-1} \sqrt{\frac{y}{y_2}},$$

La première a un caractère circulaire, la seconde un caractère hyperbolique ou logarithmique.

Voici la première introduction de l'idée d'intégrale hyperelliptique

$$(28) \quad \int \frac{Hx+K}{\sqrt{X}} dx,$$

et de ses deux variables, ou deux intégrales indépendantes de première espèce dans le cas spécial où la forme sextique  $X$  se compose d'un facteur quadratique simple  $N$  et d'un facteur quadratique répété  $D^2$ .

Comme illustration numérique établie conformément à la méthode exposée ci-dessus, nous pourrons prendre l'intégrale

$$(29) \quad \int \frac{Hx+K}{5x^2-16x+4} \frac{dx}{\sqrt{3x^2-10x+9}}.$$

La même substitution (2) a été employée dans le récent fascicule I (t. IV, § 610, 1901) des *Fonctions elliptiques* de MM. Tannery et Molk ; elle est aussi donnée (chap. II) dans mes *Applications des fonctions elliptiques* comme utile pour la réduction de l'intégrale elliptique

$$(30) \quad \int \frac{dx}{\sqrt{X}}, \quad X = ND,$$

où la quartique  $X$  se décompose en deux facteurs quadratiques  $N$  et  $D$ , spécialement lorsque l'une des quadratiques, ou toutes les deux ne se résolvent pas en facteurs linéaires réels.

L'intégrale transformée est, dans la forme de Weierstrass,

$$(31) \quad \frac{1}{\sqrt{AC-B^2}} \int \frac{dy}{\sqrt{4y(y_1-y)(y-y_2)}}$$

et une clarté considérable est ainsi jetée sur la transformation quadratique des fonctions elliptiques de Landen.

Comme exemple numérique nous pouvons encore utiliser (24) et réduire l'intégrale elliptique

$$(32) \quad \int \frac{dx}{\sqrt{(3x^2-10x+9)(5x^2-16x+14)}}.$$

M. Barbarin a déjà répondu au défi de M. Brocard dans *l'Enseignement Mathématique* (15 mai 1901). Le changement de variable qu'il cite, dans la méthode d'Hermite, n'est pas nécessaire dans le

système donné plus haut, où les quadratiques  $N$  et  $D$  sont laissées intactes ; mais les valeurs critiques  $x_1$  et  $x_2$  de la variable  $x$  sont employées et donnent les valeurs limites du quotient  $N/D$ .

J'espère que d'autres correspondants viendront s'associer à cette discussion pour donner leurs vues sur cet intéressant sujet.

A. G. GREENHILL (Woolwich).

---

## SUR QUELQUES DÉSIGNATIONS RÉLATIVES AUX SÉRIES

---

La publication de l'*Encyclopädie der mathematischen Wissenschaften* de MM. H. Burkhardt et Fr. Meyer rend opportune, croyons-nous, une révision des termes relatifs à la convergence des séries. Les mêmes mots sont employés, en effet, dans des sens différents, par divers géomètres, ce qui peut être l'origine de graves méprises pour les lecteurs non avertis.

Dans ce qui suit, nous indiquons les désignations qui nous semblent les meilleures, et nous justifions brièvement nos préférences. Pour abréger, nous nous bornons aux séries réelles.

1. *Séries convergentes et séries non convergentes.* — Si la somme

$$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$$

des  $n$  premiers termes d'une série tend vers une limite finie  $S$ , lorsque  $n$  croît indéfiniment, la série est dite *convergente*. Elle est dite *divergente*, si  $S_n$  croît en valeur absolue au delà de toute limite, en gardant à la fin toujours le même signe. Dans tous les autres cas, la série est dite *indéterminée*.

Dans le premier cas, on écrit

$$S = u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$$

et l'on emploie souvent la même notation pour désigner, en