SUR UNE VARIATION ÉLÉMENTAIRE

Autor(en): **Greenhill, A. G.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **3 (1901)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **16.05.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-4660

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

l'intermédiaire de ce dernier que le gramme dérive du mètre. Ne vaut-il pas mieux mettre l'are dans la même colonne que le décamètre et mettre le centiare dans celle du mètre, puisque le centiare est un mètre carré et l'are un décamètre carré ?

On obtiendrait ainsi un tableau dans le genre de celui qui précède et qu'il faudrait faire étudier aux élèves par de fréquentes reproductions de mémoire, soit sur papier, soit sur le tableau noir.

On trouvera peut-être qu'il y a dans ce tableau des choses inutiles ; mais chaque maître ou chaque auteur d'arithmétique est libre d'en prendre ce qu'il jugera utile à ses élèves et d'en laisser le reste. De plus, ce tableau n'a pas seulement pour but de donner une idée de la dépendance réciproque des mesures du système décimal, y compris la division centésimale du quart du méridien terrestre ; il a encore celui de donner aux élèves une idée pour ainsi dire matérielle des très grands et très petits nombres.

N'est-il pas intéressant, par exemple, de voir sur ce tableau que la seconde centésimale est l'angle que font entre eux deux peupliers voisins plantés sur une route ?

Quant aux anciens tableaux synoptiques, je crois qu'ils avaient moins pour but de faciliter l'étude du système métrique, que celui d'en faire voir la beauté et la symétrie, et, ce but-là, chacun dira qu'ils l'ont parfaitement atteint.

Ch. Berdellé (Rioz, Haute-Saône).

SUR UNE VARIATION ÉLÉMENTAIRE

Je m'attendais à une vive discussion au sujet de la question soulevée par M. Brocard dans *l'Enseignement Mathématique* (t. III, n° 1, p. 59-60) à propos de l'utilité de l'étude de la variation de la fonction

$$y = \frac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'} \tag{1}$$

ou, comme nous préférons l'écrire,

$$y = \frac{N}{D}, \tag{2}$$

où

$$N = ax^2 + 2bx + c, \qquad D = Ax^2 + 2Bx + C. \tag{3}$$

Bien que chez nous, en Angleterre, cette fonction n'ait pas encore été l'objet d'une considération spéciale de nature à lui faire prendre place dans nos programmes mathématiques, il y a des symptômes d'un commencement. Elle présente notamment un grand avantage au sujet de l'intérêt algébrique et de la variété des applications au Calcul intégral. C'est la première introduction à la substitution du second ordre. Elle est utile aussi comme exercice à l'emploi du papier quadrillé si fortement recommandé par le professeur Perry dans ses *Lectures on Practical Mathematics*.

C'est donc avec beaucoup de surprise que nous avons lu la proposition de M. Brocard déclarant que l'étude de cette fonction devrait être abandonnée, ou, tout au moins, reléguée au second plan dans un cours de mathématiques élémentaires.

L'intérêt algébrique résulte de la discussion de l'équation du second degré contenue dans une autre, obtenue lorsque x est déterminé en fonction de y par la solution de l'équation

$$(Ay - a)x^2 + 2(By - b)x + Cy - c = 0, \tag{4}$$

sous la forme

$$x = \frac{-By + b + \sqrt{(By - b)^2 - (Ay - a)(Cy - c)}}{Ay - a}. \tag{5}$$

Maintenant les valeurs limites de y sont déterminées par l'équation du second degré.

$$(By - b)^2 - (Ay - a)(Cy - c) = 0 \tag{6}$$

ou

$$\frac{Ay - a}{By - b} = \frac{By - b}{Cy - c}; \tag{7}$$

et alors

$$x = \frac{-By + b}{Ay - a} = \frac{Cy - a}{-By + b}, \tag{8}$$

ou

$$y = \frac{ax+b}{Ax+B} = \frac{bx+c}{Bx+C}; \tag{9}$$

de sorte que

$$(ax+b)(Bx+C) - (Ax+B)(bx+c) = 0, \tag{10}$$

$$(aB - Ab)x^2 + (aC - Ac)x + bC - Bc = 0. \tag{11}$$

Voici le premier exemple en Algèbre d'une substitution bilinéaire comme dans (9) changeant l'équation du second degré (6) en l'équation du second degré (11).

Les racines de (6) et de (11) sont imaginaires seulement lorsque les racines de (3)

$$N = 0 \qquad \text{et} \qquad D = 0 \tag{12}$$

sont entrelacées, ainsi qu'on le voit graphiquement par le tracé de la courbe (2) sur papier quadrillé.

Dans tous les autres cas, les racines de (6) et de (11) sont réelles; et, en les désignant par y_1, y_2, et x_1, x_2 (y_1, étant le maximum et y_2 le minimum de y) on a

$$y_1 - y = \frac{(Ay_1 - a)x^2 + 2(By_1 - b)x + Cy_1 - c}{D}, \tag{13}$$

expression dont le numérateur est un carré en vertu de (6); de sorte que

$$y_1 - y = \frac{(Ay_1 - a)(x - x_1)^2}{D}, \tag{14}$$

et, de la même manière

$$y - y_2 = \frac{(a - Ay_2)(x - x_2)^2}{D}. \tag{15}$$

Donc

$$N - y_2 D = (a - Ay_2)(x - x_2)^2, \tag{16}$$

$$-N + y_1 D = (Ay_1 - a)(x - x_1)^2; \tag{17}$$

de sorte que

$$N = p(x - x_1)^2 + q(x - x_2)^2 \tag{18}$$

$$D = P(x - x_1)^2 + Q(x - x_2)^2; \tag{19}$$

où

$$(20)\qquad P = \frac{Ay_1 - a}{y_1 - y_2}, \qquad Q = \frac{a - Ay_2}{y_1 - y_2},$$

$$(21)\qquad p = y_2 P, \qquad q = y_1 Q.$$

De là

$$(22)\qquad \begin{cases} ax + b = p(x - x_1) + q(x - x_2), \\ bx + c = -px_1(x - x_1) - qx_1(x - x_2); \end{cases}$$

$$(23)\qquad \begin{cases} Ax + B = P(x - x_1) + Q(x - x_2), \\ Bx + C = -Px_1(x - x_1) - Qx_2(x - x_2); \end{cases}$$

et une variété d'autres relations pouvant être obtenues, à titre d'exercices, en Algèbre élémentaire.

Si le professeur désire préparer des exemples numériques conduisant à des résultats rationnels simples, il a seulement à former les expressions pour N et D en assignant des valeurs entières simples à x_1, x_2, p, q, P, Q.

Ainsi, par exemple, pour

$$x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ p = 1,\ q = 2,\ P = 2,\ Q = 3$$

on a

$$(24)\qquad y = \frac{N}{D} = \frac{3x^2 - 10x + 9}{5x^2 - 16x + 14}.$$

J'ai déjà fait ressortir, dans le compte rendu du *Traité d'Analyse* de M. Appell (*l'Ens. math.*, 1re année, p. 66-72), l'utilité de la substitution (1) ou (2) pour la réduction de l'intégrale

$$(25)\qquad \int \frac{Hx + K}{Ax^2 + 2Bx + C} \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + 2bx + c}};$$

l'intégrale se sépare tout de suite en deux intégrales simples de la forme

$$(26)\qquad \int \frac{dy}{\sqrt{y(y_1 - y)}} = -\cos^{-1}\sqrt{\frac{y}{y_1}}, \text{ ou } \sin^{-1}\sqrt{\frac{y}{y_1}},$$

et

$$(27)\qquad \int \frac{dy}{\sqrt{y(y - y_2)}} = ch^{-1}\sqrt{\frac{y}{y_2}}, \text{ ou } Sh^{-1}\sqrt{\frac{y}{-y_2}},$$

La première a un caractère circulaire, la seconde un caractère hyperbolique ou logarithmique.

Voici la première introduction de l'idée d'intégrale hyperelliptique

$$\int \frac{Hx+K}{\sqrt{X}}\,dx, \tag{28}$$

et de ses deux variables, ou deux intégrales indépendantes de première espèce dans le cas spécial où la forme sextique X se compose d'un facteur quadratique simple N et d'un facteur quadratique répété D^2.

Comme illustration numérique établie conformément à la méthode exposée ci-dessus, nous pourrons prendre l'intégrale

$$\int \frac{Hx+K}{5x^2-16x+4}\,\frac{dx}{\sqrt{3x^2-10x+9}}. \tag{29}$$

La même substitution (2) a été employée dans le récent fascicule I (t. IV, § 610, 1901) des *Fonctions elliptiques* de MM. Tannery et Molk ; elle est aussi donnée (chap. II) dans mes *Applications des fonctions elliptiques* comme utile pour la réduction de l'intégrale elliptique

$$\int \frac{dx}{\sqrt{X}}, \quad X = ND, \tag{30}$$

où la quartique X se décompose en deux facteurs quadratiques N et D, spécialement lorsque l'une des quadratiques, ou toutes les deux ne se résolvent pas en facteurs linéaires réels.

L'intégrale transformée est, dans la forme de Weierstrass,

$$\frac{1}{\sqrt{AC-B^2}}\int \frac{dy}{\sqrt{4y\,(y_1-y)\,(y-y_2)}} \tag{31}$$

et une clarté considérable est ainsi jetée sur la transformation quadratique des fonctions elliptiques de Landen.

Comme exemple numérique nous pouvons encore utiliser (24) et réduire l'intégrale elliptique

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(3x^2-10x+9)\,(5x^2-16x+14)}}. \tag{32}$$

M. Barbarin a déjà répondu au défi de M. Brocard dans *l'Enseignement Mathématique* (15 mai 1901). Le changement de variable qu'il cite, dans la méthode d'Hermite, n'est pas nécessaire dans le

système donné plus haut, où les quadratiques N et D sont laissées intactes ; mais les valeurs critiques x_1 et x_2 de la variable x sont employées et donnent les valeurs limites du quotient N/D.

J'espère que d'autres correspondants viendront s'associer à cette discussion pour donner leurs vues sur cet intéressant sujet.

A. G. Greenhill (Woolwich).

SUR QUELQUES DÉSIGNATIONS

RELATIVES AUX SÉRIES

La publication de l'*Encyclopädie der mathematischen Wissenschaften* de MM. H. Burkhardt et Fr. Meyer rend opportune, croyons-nous, une revision des termes relatifs à la convergence des séries. Les mêmes mots sont employés, en effet, dans des sens différents, par divers géomètres, ce qui peut être l'origine de graves méprises pour les lecteurs non avertis.

Dans ce qui suit, nous indiquons les désignations qui nous semblent les meilleures, et nous justifions brièvement nos préférences. Pour abréger, nous nous bornons aux séries réelles.

1. *Séries convergentes et séries non convergentes.* — Si la somme

$$S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$$

des n premiers termes d'une série tend vers une limite finie S, lorsque n croît indéfiniment, la série est dite *convergente*. Elle est dite *divergente*, si S_n croît en valeur absolue au delà de toute limite, en gardant à la fin toujours le même signe. Dans tous les autres cas, la série est dite *indéterminée*.

Dans le premier cas, on écrit

$$S = u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$$

et l'on emploie souvent la même notation pour désigner, en