

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 2 (1900)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** NOUVEAUX MODÈLES CINÉMATIQUES ET INTRODUCTION  
NOUVELLE A LA THÉORIE DES COURBES CYCLOIDALES  
**Autor:** Schilling, Fr.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-3552>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 14.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# NOUVEAUX MODÈLES CINÉMATIQUES

ET INTRODUCTION NOUVELLE

## A LA THÉORIE DES COURBES CYCLOIDALES <sup>(1)</sup>

---

*Il nous semble utile d'appeler l'attention du lecteur sur une collection de nouveaux modèles <sup>(2)</sup> destinés à l'enseignement de la Cinématique. Cette collection répond au vœu exprimé par M. le professeur F. KLEIN à la réunion des mathématiciens allemands tenue à Francfort en 1896, à savoir <sup>(3)</sup> : qu'il soit édité une collection de modèles simples permettant de réaliser les mécanismes les plus importants en mettant en évidence les principes mathématiques sur lesquels ils reposent. Il est vrai qu'il existait déjà quelques modèles qui peuvent être rangés dans cette catégorie ; mais il restait à en augmenter le nombre et à les grouper systématiquement, le prix de chaque modèle étant aussi bon marché que possible. En entreprenant ce travail, M. Fr. SCHILLING rend un grand service à l'enseignement. Il faut espérer que ses modèles, dont une première série seule <sup>(4)</sup> vient de paraître, ne tarderont pas à pénétrer dans les salles de cours. Ils pourront être utilisés non seulement dans les écoles supérieures, mais aussi dans les leçons élémentaires.*

LES DIRECTEURS.

Dans le but de rendre plus facile la compréhension des modèles dont il est question dans la seconde partie de ce mémoire, je consacre la première à une introduction nouvelle et particulièrement

---

<sup>(1)</sup> Traduit de l'allemand par H. DUAIME. L'original a paru dans la *Zeitschr. f. Math. u. Phys.*, t. 44 ; 1899.

<sup>(2)</sup> Ces modèles sont édités par la maison Martin Schilling à Halle a. S. ; elle se tient à la disposition du lecteur pour lui fournir des renseignements détaillés au sujet de ces modèles.

<sup>(3)</sup> *Jahresbericht der Deutsch. Math. Vereinigung*, t. V, p. 5 ; voir aussi t. VII, p. 7.

<sup>(4)</sup> La deuxième série comprenant les mécanismes qui se rattachent à la théorie des engrenages paraîtra prochainement.

simple à la théorie des cycloïdes. Les exposés <sup>(1)</sup> que l'on a publiés jusqu'à ce jour sur cette théorie manquent de clarté, ou sont incomplets sinon même inexacts. C'est à cette circonstance qu'il faut attribuer le fait que dans les milieux des mathématiciens ces notions, en elles-mêmes très simples, ne sont pas aussi connues que l'exigerait leur importance technique dans la construction des engrenages.

## § 1. — LES COURBES CYCLOÏDALES.

Nous appellerons courbes cycloïdales les courbes dues à la génération cinématique suivante :

1. Si deux côtés adjacents  $SE_1$  et  $SE_2$  d'un parallélogramme articulé  $SE_1ME_2$  tournent autour du sommet  $S$ , avec des vitesses angulaires  $\omega$  et  $\Omega$ , différentes, mais toutes deux uniformes, le sommet opposé  $M$  décrit une courbe cycloïdale (fig. 1).

Envisageons, dans le plan du parallélogramme <sup>(2)</sup>, la variable complexe  $z = x + iy$ .

Supposons que dans la position initiale, le parallélogramme soit aplati, de telle sorte que les quatre côtés coïncident avec l'axe des  $x$ ; désignons par  $C$  et  $c$ , les longueurs des côtés  $SE_1$  et  $SE_2$ , par  $z_1$  et  $z_2$  des variables complexes représentant les positions de  $E_1$  et  $E_2$  dans le cours du mouvement, par  $z$  une variable correspondant de même au point  $M$ , enfin par  $t$  un paramètre indé-

<sup>(1)</sup> Par exemple, ceux de MM. A. VIETOR et Ch. WIENER publiés dans la *Zeitschr. f. Math. u. Phys.* (t. 25, p. 263 et suiv., 1880; t. 26, p. 255 et suiv., 1881) laissent à désirer au point de vue de la simplicité. On trouve des inexactitudes par exemple dans les traités suivants: WEISSENBORN, *Die cyklischen Kurven*, Eisenach, 1856; HATTENDORF, *Analytische Geometrie*, Hannover, 1887, p. 108 et suiv.; KENIGS, *Leçons de cinématique*, Paris, 1897, p. 163. Le meilleur exposé est encore celui que l'on trouve dans la courte note publiée en 1874 par M. RITTERSHAUS dans les *Verhandlungen zur Beförderung des Gewerbflusses in Preussen* (année 53, p. 272); M. BURMESTER l'utilise dans son traité de Cinématique (Leipzig, 1884, p. 134 et suiv.). Toutefois ces auteurs ne font pas l'étude analytique des courbes. Voir aussi GILDERMIESTER, *De lineis curvis epicycloidibus et hypocycloidibus*, Marbourg, 1866, et BELLERMANN, *Epicykloiden und Hypocykloiden*, Iena, 1867.

<sup>(2)</sup> M. MEHMKE a déjà employé des variables complexes pour des recherches analogues, notamment dans son travail: Ueber die Bewegung eines ebenen starren Systems in seiner Ebene, *Zeitschr. für Math. u. Physik*, t. 35, p. 1-24. 65-81 (1890).

pendant analogue au temps. Nous avons évidemment les relations :

$$z_1 = Ce^{i\omega t}, \quad z_2 = ce^{i\Omega t},$$

et comme

$$(I) \quad \begin{aligned} z &= z_1 + z_2, \\ z &= Ce^{i\omega t} + ce^{i\Omega t}, \end{aligned}$$

qui est l'équation générale la plus simple des courbes cycloïdales <sup>(1)</sup>.

On voit qu'il y a lieu de distinguer deux cas principaux suivant que  $\omega$  et  $\Omega$  sont de même signe ou de signes contraires.

*Nous supposons, ce qui ne diminue d'ailleurs en rien la généralité des recherches, dans le premier cas  $\omega$  et  $\Omega$  tous deux positifs, dans le second cas  $\omega$  négatif et  $\Omega$  positif, dans les deux cas  $|\omega| < \Omega$ .*

Quels que soient les signes de  $\omega$  et de  $\Omega$ , l'équation (I) peut prendre les deux formes suivantes :

$$(II) \quad z = (C + ce^{i(\Omega - \omega)t})e^{i\omega t},$$

$$(III) \quad z = (c + Ce^{i(\omega - \Omega)t})e^{i\Omega t}.$$

<sup>(1)</sup> Si nous partions d'une position quelconque du parallélogramme, l'équation (I) deviendrait, en remplaçant  $z$  et  $t$  par  $z'$  et  $t'$

$$(I') \quad z' = Ce^{i(\omega t' + \alpha)} + ce^{i(\Omega t' + \beta)}$$

où  $\alpha$  et  $\beta$  désignent les angles de  $SE_1$  et de  $SE_2$  avec l'axe des  $x$ , dans la position initiale. Faisons alors les substitutions :

$$z' = ze^{i\sigma}, \quad t' = t + \tau$$

$\sigma$  et  $\tau$  étant deux grandeurs réelles non encore déterminées, l'équation (I') devient :

$$z = Ce^{i(\omega t + \omega\tau + \alpha - \sigma)} + ce^{i(\Omega t + \Omega\tau + \beta - \sigma)}.$$

Cela revient évidemment à faire tourner le système des coordonnées d'un certain angle autour de  $S$ , et à compter le paramètre  $t$  à partir d'une nouvelle origine.

Pour ramener l'équation (I') à l'équation (I), il suffit de poser :

$$\omega\tau + \alpha - \sigma = 0 \quad \Omega\tau + \beta - \sigma = 0$$

c'est-à-dire

$$\tau = \frac{\alpha - \beta}{\Omega - \omega}, \quad \sigma = \frac{(\Omega + \omega)\tau + \alpha + \beta}{2} = \frac{\alpha\Omega - \beta\omega}{\Omega - \omega},$$

ce qui est toujours possible, sauf dans le cas où  $\omega = \Omega$ , mais alors le parallélogramme, tourne autour de  $S$  comme un système rigide.

Il faut encore remarquer que nous ne restreignons nullement la généralité de la démonstration, en supposant les grandeurs  $C$  et  $c$  toutes deux positives.



Cherchons à nous représenter la signification géométrique de l'équation (II) pour une valeur donnée  $t^*$  du paramètre  $t$ .

Afin d'être plus précis, nous nous placerons dans le premier cas ( $\omega$  et  $\Omega$  tous deux positifs); les résultats seraient d'ailleurs absolument les mêmes dans le second cas. Nous remarquerons d'abord qu'il nous suffit de ne conserver du parallélogramme que les côtés  $SE_1$  et  $E_1M$  (fig. 1). Pour représenter la parenthèse

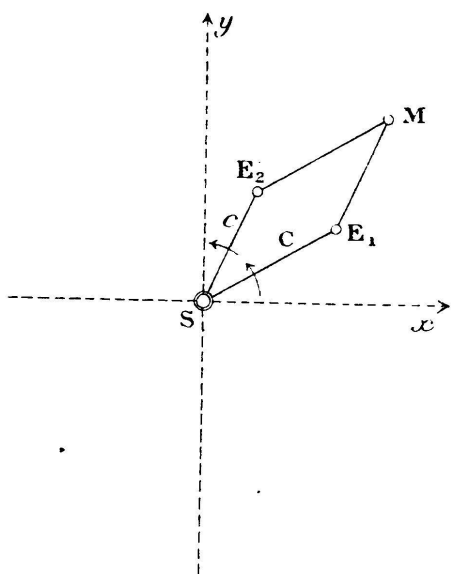


Fig. 1.

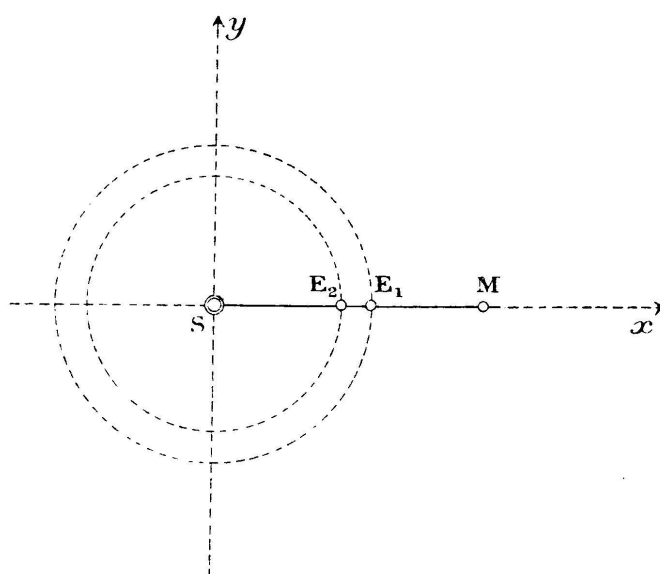


Fig. 2.

qui figure dans le second membre, portons à partir de l'origine sur l'axe des  $x$ , la longueur  $C$  en  $SE_1$  (fig. 3), puis à partir de  $E_1$ , une droite de longueur  $c$ , faisant avec l'axe des  $x$  un angle  $(\Omega - \omega) t^*$ , en  $E_1 \bar{M}$ ; le point  $\bar{M}$  est alors l'image de la quantité complexe  $C + ce^{i(\Omega - \omega)t^*}$ . Si à présent nous faisons tourner tout d'une pièce la figure  $SE_1 \bar{M}$ , d'un angle  $\omega t^*$  autour de  $S$ , elle viendra en  $SE_1^* M^*$  et le point  $M^*$  sera l'image du second membre complet  $(C + ce^{i(\Omega - \omega)t^*}) e^{i\omega t^*}$ .

En d'autres termes l'équation II exprime que le point  $M$  est soumis à chaque instant à deux rotations; l'une autour de la position momentanée du point  $E_1$ , avec une vitesse angulaire  $(\Omega - \omega)$ , l'autre (à laquelle  $E_1$  est également soumis) autour du point  $S$ , avec une vitesse angulaire  $\omega$  <sup>(1)</sup>.

(1) Ce mouvement est tout à fait analogue à celui de la lune qui tourne autour de la terre et en même temps que celle-ci, autour du soleil. Nous avons d'ailleurs choisi une partie de la notation afin de faire ressortir cette analogie.

Nous sommes ainsi amenés à une deuxième génération cinématique des courbes cycloïdales.

2. Une courbe cycloïdale est engendrée par un point  $M$  d'un système mobile, qui tourne d'une vitesse uniforme autour d'un point  $E_1$ , tandis que ce dernier tourne lui-même, également d'une vitesse uniforme autour d'un point fixe  $S$ .

Cette seconde sorte de génération présente, il est vrai, l'incon

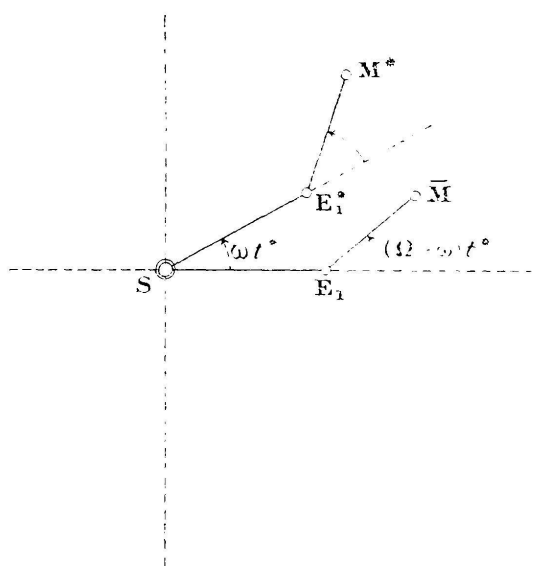


Fig. 3.

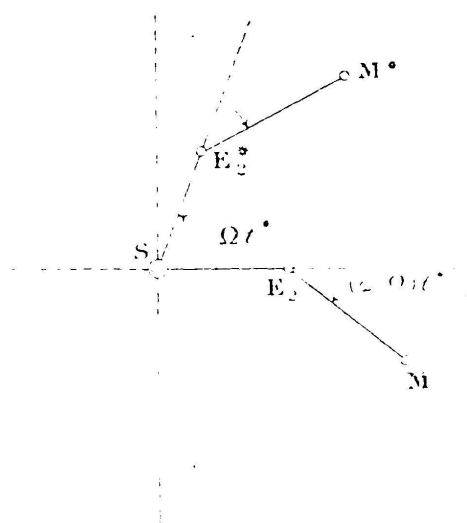


Fig. 4.

vénient de produire la même courbe de deux façons différentes.

Nous pourrions en effet chercher la signification de l'équation III, c'est-à-dire considérer la partie  $SE_2M$  du parallélogramme (fig. 4). Nous obtiendrions alors la même courbe que précédemment en donnant à  $M$  une vitesse négative cette fois,  $\omega - \Omega$ , autour de  $E_2$ , pendant que  $E_2$  tourne lui-même autour de  $S$  d'une vitesse constante  $\Omega$ .

Or, les théorèmes de Cinématique nous permettent, dans le cas de la figure 3, de remplacer pour un instant les deux vitesses angulaires simultanées de  $M$  :

$(\Omega - \omega)$  de centre  $E_1$ , et  $\omega$  de centre  $S$ , par une seule vitesse angulaire  $(\Omega - \omega) + \omega = \Omega$  autour du point  $P_1$ , qui partage la ligne  $SE_1$  dans le rapport inverse des vitesses angulaires (fig. 5) de sorte que :

$$\frac{E_1P_1}{P_1S} = \frac{\omega}{\Omega - \omega},$$

que l'on peut écrire en posant  $E_1 P_1 = b$  et  $P_1 S = a$

$$(IV) \quad \frac{b}{a} = \frac{\dot{\omega}}{\Omega - \omega}.$$

Les lieux géométriques du pôle ou centre instantané  $P_1$ , dans le plan fixe et dans le plan mobile (fixé à  $E_1 M$ ), c'est-à-dire les trajectoires polaires, sont évidemment deux cercles tangents

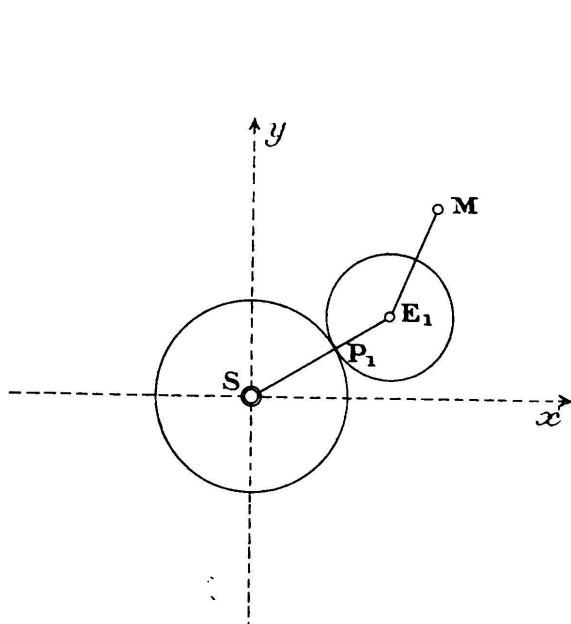


Fig. 5.

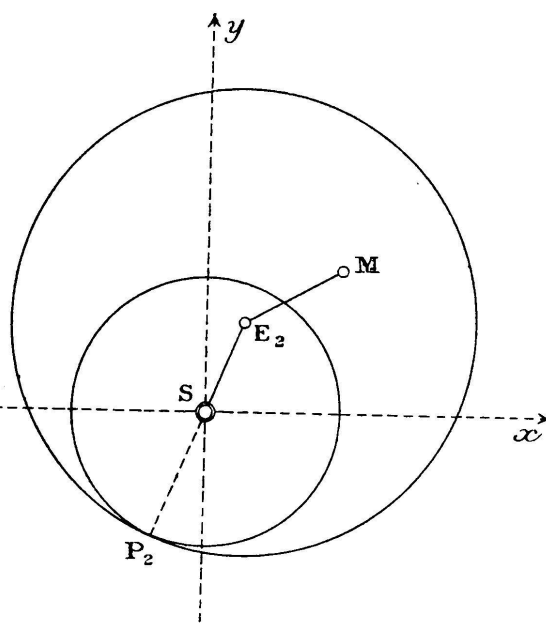


Fig. 6.

extérieurement de centres  $S$  et  $E_1$  et de rayons  $a$  et  $b$  (fig. 5). Cela nous donne une troisième génération cinématique des courbes cycloïdales, qui est d'ailleurs la plus connue.

3. *Une courbe cycloïdale est la courbe décrite par un point  $M$  invariablement lié à un cercle qui roule sur un cercle fixe.*

Nous pourrions faire un raisonnement analogue pour le cas de la figure 4. Le pôle  $P_2$ , qui est alors situé sur le prolongement de  $SE_2$  au delà de  $S$  est donné par l'équation

$$\frac{E_2 P_2}{P_2 S} = \frac{\Omega}{\omega - \Omega},$$

ou en désignant par  $A$  et  $B$  les valeurs absolues des longueurs  $P_2 S$  et  $E_2 P_2$

$$(V) \quad \frac{B}{A} = \frac{\Omega}{\Omega - \omega}.$$

Les cercles polaires sont alors tangents intérieurement. Nous pouvons donc dire que :

4. Toute courbe cycloïdale du premier type peut être engendrée, soit par deux cercles tangents extérieurement et roulant l'un sur l'autre, soit par le roulement de deux cercles tangents intérieurement; dans ce dernier cas, le grand cercle doit toujours rouler sur le petit.

En soustrayant les équations IV et V, on a :

$$(VI) \quad \frac{B}{A} - \frac{b}{a} = 1.$$

On voit en outre, par la simple inspection des figures, que :

$$(VII) \quad b + a = C,$$

$$(VIII) \quad B - A = c,$$

c'est-à-dire :

5. La distance du point décrivant au centre du cercle mobile, de l'un des couples de cercles, est égale à la distance des centres de l'autre couple.

Les équations (VI), (VII) et (VIII) déterminent sans ambiguïté A, B, C si l'on connaît a, b, c et vice versa.

Enfin l'équation (VI) a la signification géométrique suivante :

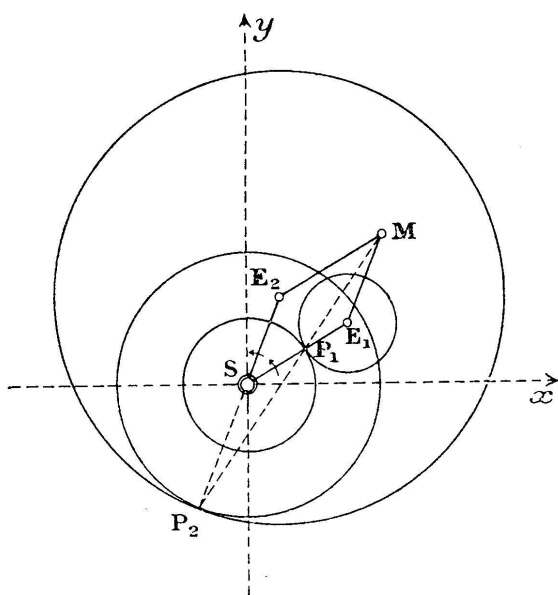


Fig. 7.

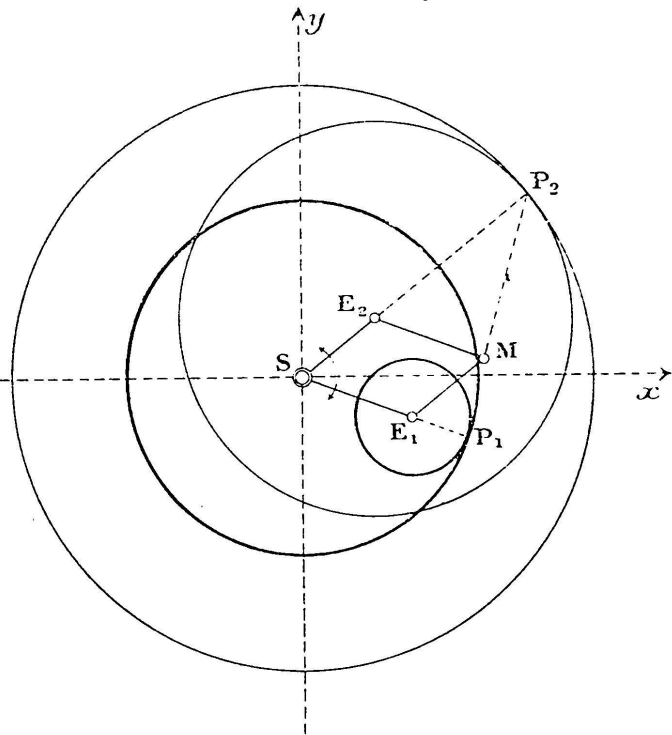


Fig. 7\*.

6. Si l'on réunit les figures 5 et 6 construites pour le même instant  $t^*$  en une seule de façon à rétablir le parallélogramme primitif, les points  $P_1$ ,  $P_2$  et  $M$  sont en ligne droite (fig. 7).

Ce théorème permet de construire graphiquement A, B, C, quand on connaît  $a, b, c$  et inversement.

Pour le second cas ( $\omega < 0, \Omega > 0, |\omega| < \Omega$ ) nous nous contenterons des remarques suivantes :

4\*. *Toute courbe cycloïdale du second type peut être engendrée par deux couples de cercles tangents intérieurement, dans les deux cas le petit cercle roulant sur le grand.*

Les formules correspondant aux formules (IV) à (VIII) sont alors les suivantes, où  $a, b$  et A, B désignent toujours les valeurs absolues des rayons  $SP_1, P_1E_1$  et  $SP_2, P_2E_2$

$$(IV^*) \quad \frac{b}{a} = -\frac{\omega}{\Omega - \omega}, \quad (V^*) \quad \frac{B}{A} = \frac{\Omega}{\Omega - \omega},$$

$$(VI^*) \quad \frac{B}{A} + \frac{b}{a} = 1,$$

$$(VII^*) \quad a - b = C, \quad (VIII^*) \quad A - B = c.$$

Les théorèmes 5 et 6 s'appliquent ici sans aucune modification <sup>(1)</sup>.

L'équation (VI\*) nous montre que si l'un des rapports des rayons est égal à  $\frac{1}{2}$ , l'autre l'est aussi ; dans ce cas,  $\omega = -\Omega$ , à cause des équations (IV\*) et (V\*), et l'équation primitive devient :

$$(IX) \quad z = Ce^{-i\Omega t} + ce^{i\Omega t}$$

qui peut s'écrire en égalant respectivement les portions réelles et les portions imaginaires :

$$(X) \quad \begin{aligned} x &= (c + C) \cos \Omega t, \\ y &= (c - C) \sin \Omega t, \end{aligned}$$

et si l'on fait abstraction du cas où  $C = c$ , on déduit de là

$$\frac{x^2}{(c + C)^2} + \frac{y^2}{(c - C)^2} = 1$$

donc :

7. *Dans le cas particulier où  $\omega = -\Omega$  : si  $c = C$  le point M*

<sup>(1)</sup> Soit par exemple : C et  $\frac{\omega}{\Omega}$ , constants, mais  $c$  variable, l'équation (I) représente par un choix convenable de  $c$  toute courbe cycloïdale qui peut être engendrée par le roulement d'un certain couple de cercles.

décrit un segment de l'axe des  $x$ ; si  $c \geq C$  le point  $M$  décrit une ellipse dont les axes sont parallèles aux axes coordonnés et ont pour valeurs  $2(c + C)$  et  $2|c - C|$ .

La même équation (VI\*) nous permet encore de différencier les deux couples de cercles :

8. Si, dans les courbes du second type, le rapport des rayons d'un couple de cercles est  $> \frac{1}{2}$ , le rapport des rayons de l'autre couple est  $< \frac{1}{2}$ .

En nous basant sur les remarques précédentes, nous proposerons les dénominations suivantes pour les divers types de courbes cycloïdales :

9. Nous appellerons « *Epitrochoïdes* » les courbes cycloïdales du premier type  $\left(\frac{\omega}{\Omega} > 0\right)$ , et « *Hypotrochoïdes* » celles du second  $\left(\frac{\omega}{\Omega} < 0\right)$ .

Le dernier théorème nous fournit un moyen d'indiquer par quel couple de cercles la trochoïde a été engendrée.

10. On pourra appeler « *Epitrochoïde à centre libre* » ou « *Epitrochoïde à centre couvert* », la même épistrochoïde suivant que le cercle roulant regardé comme un disque plein laisse voir ou couvre le centre du cercle fixe; de même l'hypotrochoïde sera dite « *Hypotrochoïde à centre libre* » ou « *Hypotrochoïde à centre couvert* ».

Nous donnerons enfin les définitions suivantes, qui supposent seulement  $|\omega| < |\Omega|$ .

11. Dans le premier comme dans le second cas, nous dirons que la courbe est une épi- ou hypotrochoïde allongée, raccourcie ou ordinaire <sup>(1)</sup> selon que le rapport  $\frac{c}{C}$  est  $>$ ,  $<$  ou  $= \left|\frac{\omega}{\Omega}\right|$  <sup>(2)</sup>.

(1) J'ai employé les termes usités dans les ouvrages français, bien qu'ils ne correspondent nullement aux termes allemands : *verschlungene* (entrelacée), *gestreckte* (étirée), *gespitzte* (à rebroussements). On remarquera aussi que le terme épicycloïde est employé ici dans un sens beaucoup plus restreint que dans les ouvrages français.

Note du trad.

(2) Si  $\frac{c}{C} = \left|\frac{\omega}{\Omega}\right|$ , les cercles fixes des deux couples coïncident.

Nous nommerons aussi pour abrégé, épi- ou hypocycloïde (à centre libre ou couvert), l'épi- ou hypotrochoïde ordinaire.

J'ajouterai encore, à l'appui de ce qui précède, les définitions géométriques données par M. Chr. WIENER, dans le travail cité plus haut (p. 32).

II\*. Si le point décrivant M et le centre du cercle fixe sont tous deux intérieurs ou tous deux extérieurs au cercle mobile nous avons une trochoïde allongée.

Si le point décrivant M est intérieur et le centre du cercle fixe extérieur au cercle mobile ou vice versa, nous avons une trochoïde raccourcie.

Si enfin le point décrivant M est sur le cercle mobile (le centre du cercle fixe pouvant d'ailleurs être à l'extérieur, ou à l'intérieur) nous avons une trochoïde ordinaire.

J'indique en terminant, les équations des trochoïdes en coordonnées rectangulaires  $x, y$ ; égalant les portions réelles et les portions imaginaires de l'équation (I) on a :

$$(XI) \quad \begin{aligned} x &= C \cos \omega t + c \cos \Omega t, \\ y &= C \sin \omega t + c \sin \Omega t. \end{aligned}$$

On peut transformer ces équations, de manière que l'on puisse reconnaître de suite la génération de la trochoïde. Soit par exemple une épitrochoïde à centre libre. Introduisons à la place de  $t$  le paramètre  $\lambda$  (donné par  $\lambda = \omega t$ ) qui désigne l'angle dont l'axe central  $SE_1$  du couple de cercles a tourné autour de S,

---

En effet, dans le premier cas, par exemple, on déduit des équations

$$(VII \text{ et } VIII) \quad \frac{B - A}{b + a} = \frac{c}{C} = \frac{\omega}{\Omega}$$

ou en vertu des équations (IV et V) :

$$\frac{A}{a} \frac{\frac{\Omega}{\Omega - \omega} - 1}{\frac{\omega}{\Omega - \omega} + 1} = \frac{\omega}{\Omega}$$

c'est-à-dire

$$\frac{A}{a} = 1.$$

La démonstration est analogue pour le second cas.

et éliminons les grandeurs  $\frac{\omega}{\Omega}$  et  $C$  à l'aide des équations (IV) et (VII).

$$\begin{aligned} \text{(XI a)} \quad x &= (a + b) \cos \lambda + c \cos \frac{a + b}{b} \lambda, \\ y &= (a + b) \sin \lambda + c \sin \frac{a + b}{b} \lambda. \end{aligned}$$

Nous aurons de même pour une épitrochoïde à centre couvert

$$\begin{aligned} \text{(XI b)} \quad x &= C \cos \frac{B - A}{B} \Lambda + (B - A) \cos \Lambda, \\ y &= C \sin \frac{B - A}{B} \Lambda + (B - A) \sin \Lambda, \end{aligned}$$

où

$$\Lambda = \Omega t.$$

Enfin pour l'hypotrochoïde, nous aurons l'un des deux groupes

$$\begin{aligned} \text{(XI c)} \quad x &= (a - b) \cos \lambda + c \cos \frac{b - a}{b} \lambda, \\ y &= (a - b) \sin \lambda + c \sin \frac{b - a}{b} \lambda, \end{aligned}$$

dans lequel

$$\lambda = \omega t,$$

ou

$$\begin{aligned} x &= C \cos \frac{B - A}{B} \Lambda + (A - B) \cos \Lambda, \\ y &= C \sin \frac{B - A}{B} \Lambda + (A - B) \sin \Lambda, \end{aligned}$$

dans lequel

$$\Lambda = \Omega t.$$

Ces équations peuvent être utilisées pour l'étude de courbes particulières; mais elles sont évidemment moins simples et moins générales que les équations (I) et (XI).

## § 2. — DESCRIPTION DES MODÈLES

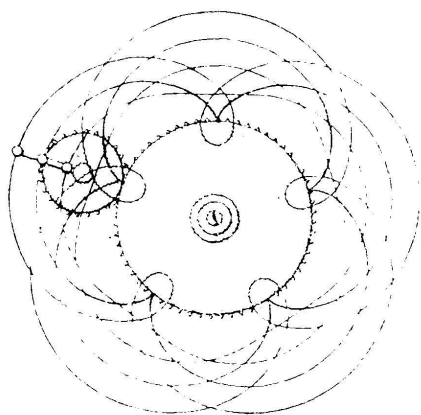
Ces modèles se partagent en quatre groupes que nous allons successivement examiner.

Les quatre modèles du premier groupe montrent les doubles générations des épitrochoïdes et hypotrochoïdes (mod. 1-4).

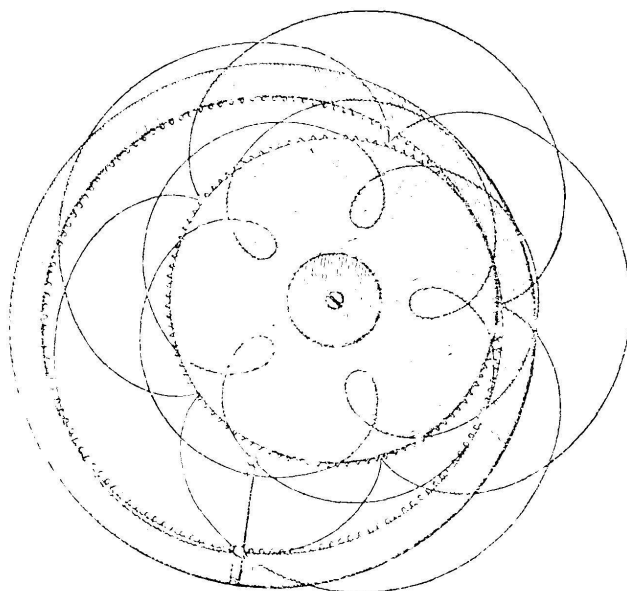


Le premier modèle donne les trois sortes d'épistrochoïdes : allongée, raccourcie et ordinaire, à centre libre ; le deuxième la même épistrochoïde allongée comme au premier mais à centre couvert, et une épistrochoïde ordinaire complètement différente. On

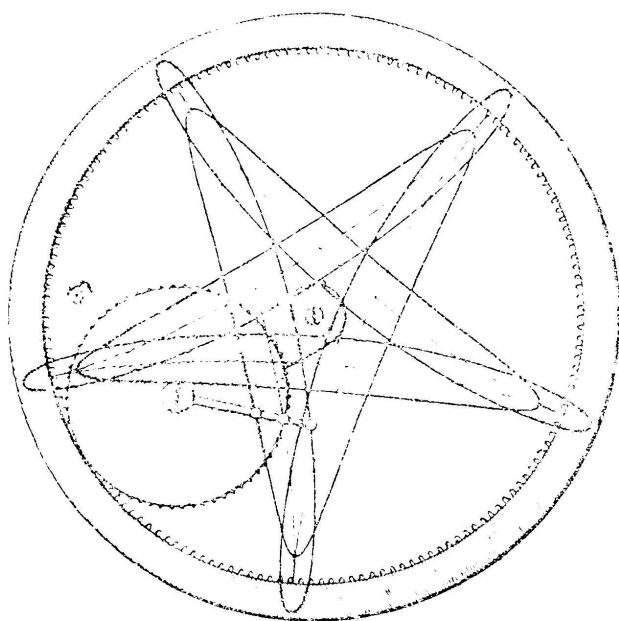
## PREMIER GROUPE



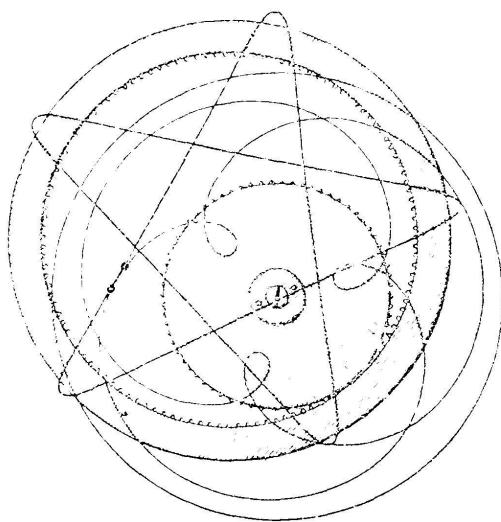
Modèle 1.



Modèle 2.



Modèle 3.



Modèle 4.

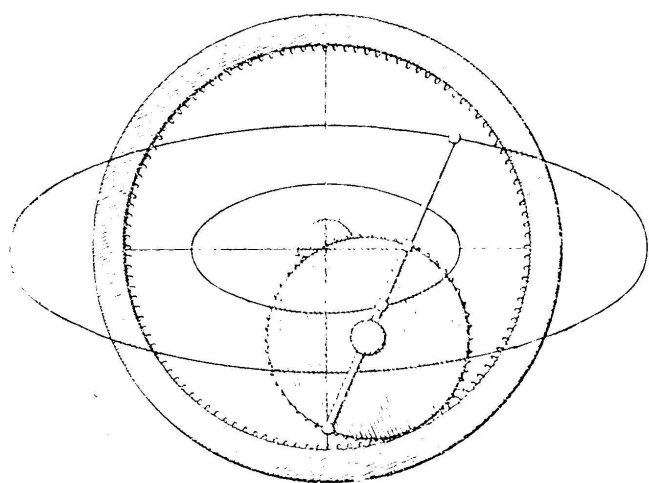
remarquera, dans les deux modèles, les positions relatives de la trochoïde ordinaire et de la trochoïde allongée.

Les deux modèles suivants nous montrent de la même façon, les trois sortes d'hypotrochoïdes : allongée, raccourcie et ordinaire, à centre libre (mod. 3) et à centre couvert (mod. 4). Tandis qu'un point du système mobile décrit une trochoïde dans

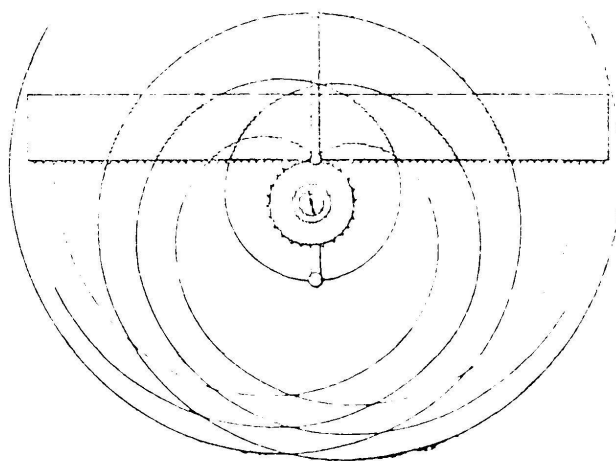
le système solide, réciproquement un point du système solide décrit également une trochoïde dans le système mobile. C'est ainsi que dans le modèle 4, un point du système fixe décrit une épitrochoïde à centre couvert, tandis qu'un point du système mobile, décrit une hypotrochoïde qui est d'ailleurs la même que l'hypotrochoïde raccourcie représentée sur le modèle 3 : d'autre part les positions initiales des deux points décrivants coïncident.

Comme on peut s'en rendre compte d'après les figures ces modèles consistent en deux cercles représentés par des disques

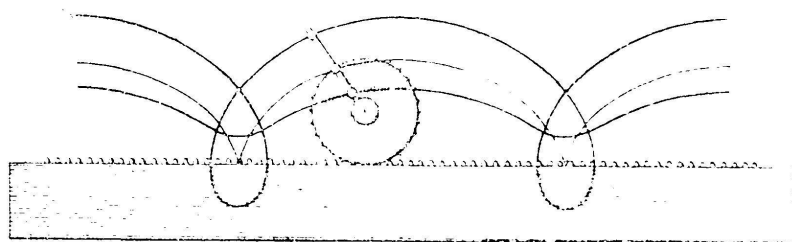
## DEUXIÈME GROUPE



Modèle 5.



Modèle 6.



Modèle 7.

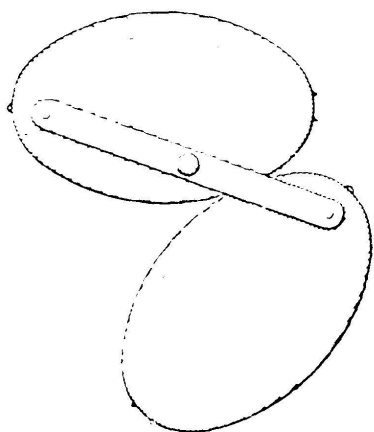
ou des anneaux de métal (feuilles de zinc) qui sont assujettis à rouler l'un sur l'autre au moyen d'un système d'engrenages. On dirige le cercle mobile sur le cercle fixe à l'aide d'une manivelle fixée sur le côté postérieur. Les courbes sont marquées sur un disque de verre ; les points décrivants sont représentés par des petites boules.

Le *deuxième groupe* donne avec ses trois modèles les cas spéciaux des courbes cycloïdales (mod. 5, 6 et 7). Le premier modèle

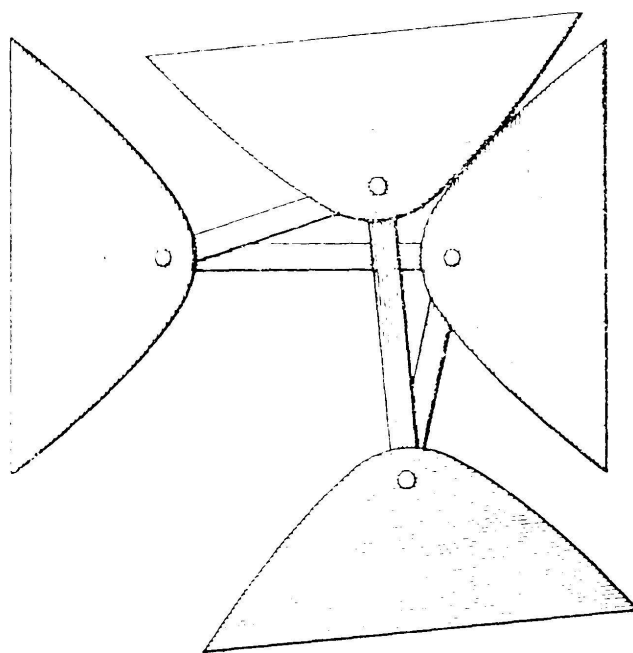
montre les générations d'ellipses et de droites, par roulement d'un cercle à l'intérieur d'un cercle de rayon double (Th. 7), en même temps il permet de vérifier le fait que si une droite se meut, de telle sorte que ses extrémités glissent sur deux droites qui se coupent, tout point lié invariablement à cette droite décrit une ellipse ou une double droite.

Les deux autres modèles représentent les générations des développantes de cercles et des cycloïdes allongées, ordinaires

TROISIÈME GROUPE.



Modèle 8.



Modèle 9.

et raccourcies par roulement d'une droite sur un cercle et d'un cercle sur une droite <sup>(1)</sup>.

La construction de ces modèles est absolument analogue à celle des précédents. Pour rendre possible le roulement de la droite sur le disque circulaire dans le modèle 6, l'extrémité de la manivelle aboutit à un curseur qui glisse sur le côté infé-

(<sup>1</sup>) Par analogie, nous appellerons développante de cercle allongée, raccourcie, ou ordinaire, la courbe décrite par un point invariablement lié à une droite qui roule sur un cercle suivant que ce point sera du même côté de la droite que le centre du cercle mobile, de l'autre côté ou sur la droite même.

De même la cycloïde sera dite allongée, raccourcie ou ordinaire selon que le point décrivant, sera à l'extérieur, à l'intérieur, ou sur la circonférence du cercle mobile.

(Il faut pourtant remarquer que la courbe décrite par un point de la droite est seule une véritable développante de cercle ; les deux autres courbes ne répondant nullement à la définition de la développante.) — Note du trad.

rieur de la droite ; dans le modèle de la cycloïde on remplace généralement la manivelle par un dispositif, qui peut passer sous la droite.

Les deux modèles du *troisième groupe* concernent les manivelles antiparallèles à rotations de même sens et à rotations contraires, avec leurs trajectoires polaires (mod. 8 et 9).

Elles consistent en un contre-parallélogramme articulé KLMN (fig. 8) dont les côtés sont égaux deux à deux. Suivant que l'on

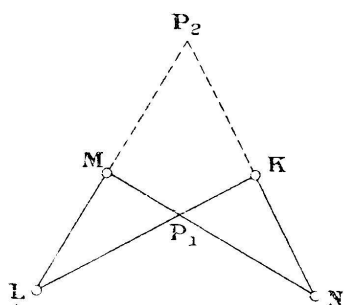


Fig. 8.

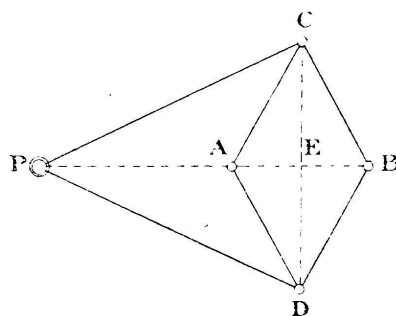


Fig. 9.

fixe, un des petits côtés ou un des grands, les deux côtés adjacents au côté fixe, « les manivelles » peuvent tourner dans le même sens ou en sens contraire. Les trajectoires polaires roulant l'une sur l'autre pendant le mouvement sont deux ellipses congruentes (ou deux hyperboles), lieux des points d'intersection  $P_1$  (ou  $P_2$ ) des manivelles dans le système fixe et dans la figure liée au côté opposé, qu'on nomme le « lien »<sup>(1)</sup>.

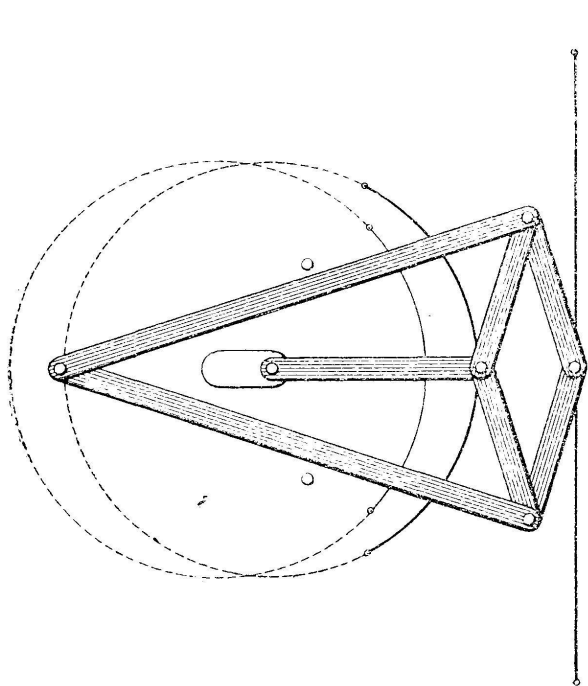
La disposition générale des modèles est suffisamment visible dans les figures. On produit le roulement dans le premier modèle en agissant sur un petit bouton que l'on voit sur une des manivelles, dans le second au moyen d'une manivelle placée à l'envers du modèle. On a d'ailleurs ajouté des dents d'engrenage, pour faciliter le passage des points d'inversion au moment où le contre-parallélogramme se changerait en parallélogramme (les quatre côtés tombent alors en ligne droite).

Enfin le *quatrième groupe* contient les inverseurs de Peaucellier, de Hart et de Sylvester-Kempe, appareils pour effectuer les transformations par rayons réciproques (mod. 10, 11 et 12).

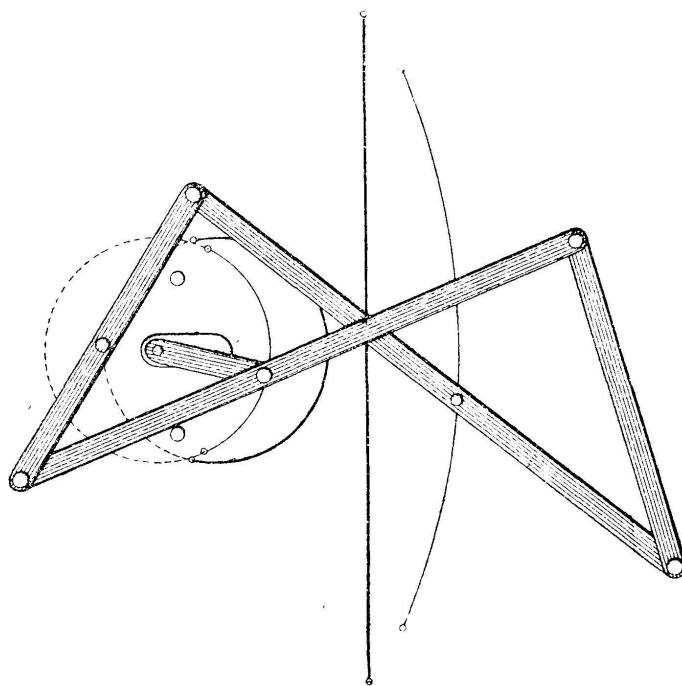
<sup>(1)</sup> Voir : BURMESTER, *Lehrbuch der Kinematik*, p. 302 et suiv. et REULEAUX, *Theoretische Kinematik* (Braunschweig, 1875), p. 187 et suiv., traduction française par A. Debitze. Paris, 1877, p. 308 et suiv.

Ces trois inverseurs ont entre eux des rapports étroits, qui ne sont pas assez connus; je voudrais les indiquer en quelques mots et rappeler en même temps sur quelle base mathématique reposent ces appareils.

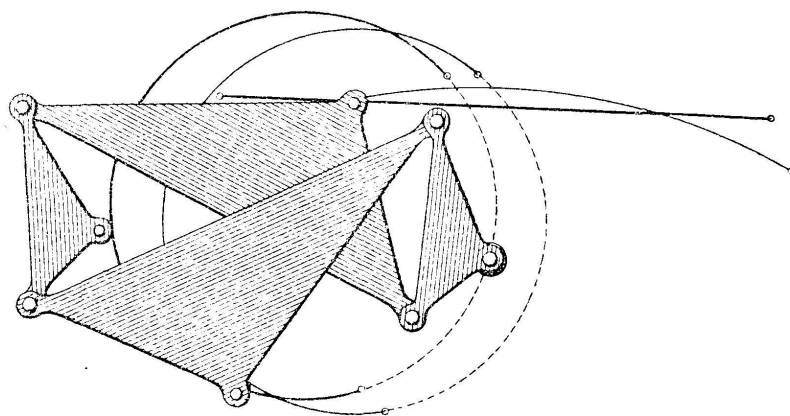
## QUATRIÈME GROUPE



Modèle 10.



Modèle 11.



Modèle 12.

Commençons par l'inverseur Peaucellier, découvert le premier (1864). Ce système articulé se compose d'un rhombe ABCD, et de deux tiges égales PC et PD, qui se joignent en P et aboutissent à deux sommets opposés du rhombe (fig. 9).

---

(<sup>1</sup>) Voir : BURMESTER, *Lehrbuch der Kinematik*, p. 564 et suiv.; KEMPE, *How to draw a straight line*. London, 1877; NEUBERG, *Systèmes de tiges articulées*. Liège, 1886.

Quelle que soit la déformation on a :

$$\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PE}^2 - \overline{AE}^2 = \overline{PC}^2 - \overline{AC}^2,$$

Les points A et B sont deux points correspondants d'une transformation par rayons réciproques, de centre P et de puissance  $\overline{PC}^2 - \overline{AC}^2$ .

L'inverseur de Hart (1874) consiste en un contre-parallélogramme articulé KLMN ( $KL = MN$ ,  $KN = LM$ ) (fig. 10). La droite idéale QT, menée parallèlement à KM, coupe les tiges

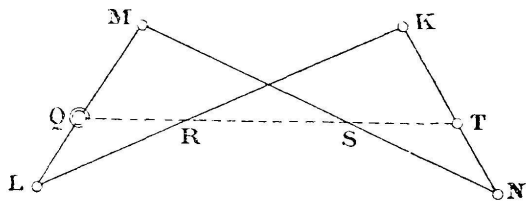


Fig. 10.

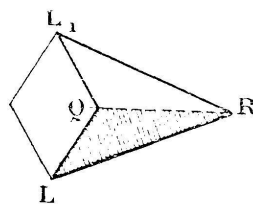


Fig. 11 a.

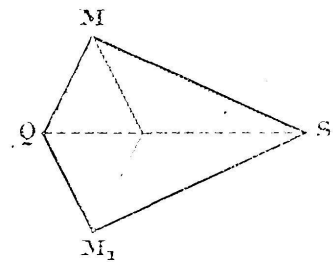


Fig. 11 b.

en des points Q, R, S, T. Si l'on construit les symétriques des triangles LQR et MQS par rapport à la droite QT, on a les figures LQRL<sub>1</sub> et MQSM<sub>1</sub> (fig. 11 a et 11 b) qui représentent les parties CAPD et CBPD de l'inverseur Peaucellier.

Comme dans ce dernier  $\overline{QR} \cdot \overline{QS}$  est constant, il est égal ici à

$$(\overline{MN}^2 - \overline{ML}^2) \frac{\overline{MS} \cdot \overline{SN}}{\overline{MN}^2}.$$

Les points R et S correspondent dans une transformation par rayons réciproques dont le centre est Q et dont la puissance est la constante indiquée.

L'inverseur de Sylvester-Kempe (1875) n'est qu'une généralisation du précédent; il se compose de quatre triangles semblables dont quatre côtés analogues forment le parallélogramme KLMN (fig. 12).

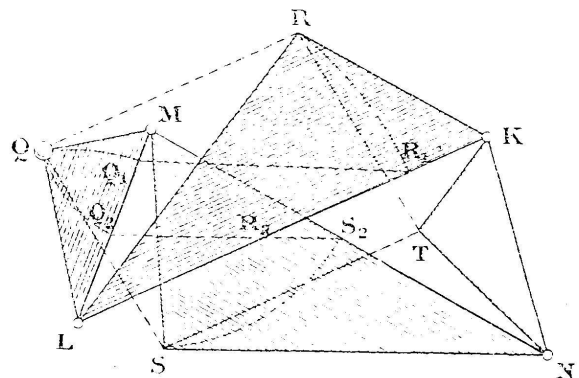


Fig. 12.

On peut amener la droite idéale QR, dans la position Q<sub>1</sub>R<sub>1</sub> || MK, en faisant tourner les points Q et R d'angles

égaux  $\widehat{QLM}$ ,  $\widehat{RLK}$ , autour de L; de même on amènera la droite QS en  $Q_2S_2 \parallel MK$  en faisant tourner Q et S d'angles égaux  $\widehat{QML}$ ,  $\widehat{SMN}$  autour de M. Il s'ensuit que non seulement l'angle  $\widehat{RQS}$  reste constant, mais que l'on a aussi  $QR.QS = Q_1R_1.Q_2S_2$ , de même que  $Q_2R_2.Q_2S_2$  est constant et encore égal à

$$(\overline{MN}^2 - \overline{ML}^2) \frac{MS.SN}{\overline{MN}^2}. \quad (1)$$

*Pendant la déformation du système articulé, les quatre points Q, R, S, T forment donc un parallélogramme dont les angles sont constants, et dont l'aire est constante.*

*Si l'on fixe le point Q, les points R et S donnent deux points correspondants d'une transformation ordinaire par rayons réciproques dont le centre est Q et dont la puissance est égale à la constante indiquée plus haut, qui suppose que l'un des points R ou S, a tourné d'un angle  $\widehat{RQS}$ , autour de Q dans un sens convenablement choisi.*

Ces trois modèles sont construits comme les précédents, complètement en métal. A l'un des points choisis pour la transformation, on a fixé un bras de manivelle dont la rotation est assurée, même dans les deux positions limites par un dispositif spécial placé sur la face inférieure du modèle. Quand on fera tourner la manivelle, le premier point suivra soit un arc de cercle dont le centre est le centre fixe de la transformation, soit un autre arc de cercle coupant le premier, le point correspondant décrira alors soit une droite, soit un arc de cercle. Ces diverses courbes se dessinent sur la planche qui porte l'appareil.

FR. SCHILLING (Göttingue).

Traduit de l'allemand par H. DUAIME.

---

(1) Comparer à l'inverseur de Hart.