

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 2 (1900)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** SPHÈRE ET ELLIPSOIDE SPHÈRES CONNCENTRIQUES ET ELLIPSOIDES CONCENTRIQUES HOMOTHÉTIQUES  
**Autor:** Kilbinger  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-3564>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 24.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

dérivées, paradoxe qui n'en est un que pour des élèves déjà forts, alors que les commençants s'étonnent qu'on ne leur démontre pas l'existence de la dérivée.

Le simple bon sens nous défend de définir le point comme ce qui dans l'espace peut être déterminé par trois nombres, et c'est cependant là la seule définition qui rend compte de toutes les difficultés que l'on rencontre en Géométrie. Je regrette, pour ma part, que l'enseignement de la Géométrie analytique ne se fasse pas en partant de ce point de vue si clair et si fécond ; mais il est bien évident que l'esprit d'un commençant se révolterait si de prime abord on se plaçait sur un pareil terrain, il veut, en effet, reconnaître dans les définitions des mots point, ligne, surface, l'image qu'il s'est faite des choses représentées par ces mots qui lui sont familiers.

H. LAURENT (Paris).

## SPHÈRE ET ELLIPSOÏDE

### SPHÈRES CONCENTRIQUES ET ELLIPSOÏDES CONCENTRIQUES HOMOTHÉTIQUES <sup>(1)</sup>

Dans une note précédente <sup>(2)</sup> nous avons fait voir comment on peut dériver des théorèmes sur l'ellipse et sur des ellipses concentriques homothétiques des théorèmes correspondants du cercle et des cercles concentriques, quand les cercles et les ellipses sont en affinité. Le présent travail contient une étude analogue sur la sphère et l'ellipsoïde, ainsi que sur les sphères concentriques et les ellipsoïdes concentriques homothétiques. Pour entrer en matière, nous allons rappeler quelques propositions sur les systèmes alliés de l'espace.

Si deux systèmes de l'espace  $\Sigma$  et  $\Sigma_1$  sont alliés, ou en affinité,

<sup>(1)</sup> REYE, *Geometrie der Lage*, 2. Abthlg ; 3. Auflage, Vortrag 8 ; 3. Abthlg ; 3. Auflage, Vortrag 5.

<sup>(2)</sup> « Cercle et ellipse », etc. *L'Enseignement math.*, 1<sup>re</sup> année, 1899, p. 452.

leurs plans à l'infini se correspondent l'un à l'autre. Comme, d'après cela, toute droite à l'infini dans  $\Sigma$  a pour correspondante une droite à l'infini dans  $\Sigma_1$ , deux systèmes plans homologues dans  $\Sigma$  et  $\Sigma_1$  sont aussi en affinité ; et de même, deux ponctuelles homologues de  $\Sigma$  et  $\Sigma_1$  sont projectives semblables. Il s'ensuit que non seulement les points milieux de deux segments rectilignes homologues de  $\Sigma$  et  $\Sigma_1$  sont des points homologues, mais encore qu'à deux segments égaux quelconques d'une droite dans  $\Sigma$  correspondent deux segments égaux sur la droite homologue dans  $\Sigma_1$ . A des lignes et des plans parallèles correspondent des lignes et des plans parallèles. A tout parallélogramme de  $\Sigma$  doit donc correspondre un parallélogramme de  $\Sigma_1$  et à tout parallélipipède un parallélipipède.

Deux solides quelconques de  $\Sigma$  sont entre eux dans le même rapport que les solides homologues de  $\Sigma_1$ , et, par suite, quand deux solides de  $\Sigma$  sont égaux, il en est de même des solides homologues de  $\Sigma_1$ .

Supposons dans les deux systèmes alliés  $\Sigma$  et  $\Sigma_1$  deux surfaces homologues quelconques. Comme tout système de cordes parallèles dans l'une des surfaces a pour correspondant un système de cordes parallèles dans l'autre et que tout point milieu d'une corde correspond au point milieu de la corde homologue, il en résulte que dans deux surfaces alliées du second ordre, un plan diamétral correspond à un plan diamétral et deux diamètres conjugués ou un plan diamétral et son diamètre conjugué correspondent respectivement à deux diamètres conjugués ou à un plan diamétral et son diamètre conjugué.

Une sphère quelconque peut être alliée à un ellipsoïde, et les deux surfaces peuvent être regardées comme surfaces homologues des systèmes alliés de l'espace. Soient donnés la sphère  $\alpha$  et l'ellipsoïde  $\alpha_1$ , et supposons qu'ils se correspondent dans les systèmes alliés de l'espace  $\Sigma$  et  $\Sigma_1$  ; alors il sera facile de déduire, comme auparavant, des théorèmes connus de la sphère les théorèmes correspondants sur l'ellipsoïde.

Nous établissons les relations suivantes :

Trois diamètres conjugués d'une sphère étant perpendiculaires entre eux, tous les parallélipipèdes dont les faces sont tangentes à la sphère  $\alpha$  aux extrémités de trois diamètres conjugués quel-

conques sont des cubes ayant tous le même volume  $8r^3$ ,  $r$  étant le rayon de la sphère  $\alpha$ . Le volume du cube circonscrit est donc avec celui de la sphère dans le rapport de  $8r^3 : \frac{4\pi}{3} r^3$  ou  $8 : \frac{4\pi}{3}$ . De là on déduit pour l'ellipsoïde  $\alpha_1$  ce qui suit :

« Tous les parallélépipèdes, dont les faces sont tangentes à  
« l'ellipsoïde  $\alpha_1$  aux extrémités de trois diamètres conjugués  
« quelconques ont le même volume  $8abc$ , en désignant par  $2a$ ,  
«  $2b$ ,  $2c$  les segments interceptés par la surface sur ses trois axes. »

Comme dans les systèmes  $\Sigma$  et  $\Sigma_1$  les corps ou solides homologues sont en proportion, nous concluons de ce qui précède, en désignant par  $V$  le volume de l'ellipsoïde  $\alpha_1$  :

$$\frac{4\pi}{3} r^3 : 8r^3 = V : 8abc,$$

donc :

$$V = \frac{4\pi}{3} abc.$$

La sphère  $\alpha$  étant divisée en huit parties équivalentes par trois plans diamétraux conjugués, il en est de même de l'ellipsoïde  $\alpha_1$ .

Les points milieux de toutes les cordes de la sphère  $\alpha$  qui passent par un seul et même point, sont situés sur une sphère  $\xi$ ; la droite qui joint ce point au centre de la sphère  $\alpha$  est aussi un diamètre de la sphère  $\xi$ . De là nous concluons que :

« Les points milieux de toutes les cordes de l'ellipsoïde  $\alpha_1$  qui  
« passent par un seul et même point, sont situés sur un ellip-  
« soïde  $\xi_1$  <sup>(1)</sup>; la droite qui joint ce point au centre de l'ellip-  
« soïde  $\alpha_1$  passe aussi par le centre de l'ellipsoïde  $\xi_1$ . »

Nous rendrons notre discussion sur la sphère et l'ellipsoïde plus intéressante encore en considérant des sphères concentriques et des ellipsoïdes concentriques homothétiques.

Supposons de nouveau, comme précédemment, que la sphère  $\alpha$  et l'ellipsoïde  $\alpha_1$  soient des surfaces homologues dans les deux systèmes alliés de l'espace  $\Sigma$  et  $\Sigma_1$ . Prenons maintenant une seconde sphère  $\xi$  concentrique à la première, et nous aurons comme surface homologue du système  $\Sigma_1$ , un ellipsoïde  $\xi_1$ , con-

---

(1) L'ellipsoïde  $\xi_1$  ne saurait être une sphère, les systèmes  $\Sigma$  et  $\Sigma_1$  n'étant point semblables, mais seulement alliés.

centrique à l'ellipsoïde  $\alpha_1$ . Deux diamètres conjugués quelconques d'une sphère étant perpendiculaires entre eux, les sphères  $\alpha$  et  $\xi$  ont en commun la même gerbe polaire des diamètres ; il en est de même des ellipsoïdes  $\alpha_1$  et  $\xi_1$ , et par conséquent les axes de  $\alpha_1$  et de  $\xi_1$  coïncident ;  $\alpha_1$  et  $\xi_1$  sont appelés « ellipsoïdes concentriques homothétiques ».

En plaçant, dans ce qui suit, les propositions correspondantes l'une en regard de l'autre, nous concluons :

## DES THÉORÈMES A GAUCHE :

a) Les sphères  $\alpha$  et  $\xi$  sont rencontrées par tout plan sécant  $s$  en deux cercles concentriques  $g$  et  $l$ .

b) Les points milieux d'une gerbe de cordes parallèles de  $\alpha$  et  $\xi$  sont tous situés sur un plan diamétral commun.

c) Les centres des couples de circonférences concentriques déterminées sur les sphères  $\alpha$  et  $\xi$  par un faisceau de plans sécants parallèles, sont tous situés sur un diamètre commun des deux sphères.

d) Les quatre plans tangents construits aux extrémités d'un diamètre commun aux deux sphères  $\alpha$  et  $\xi$  sont perpendiculaires à ce diamètre et par conséquent parallèles entre eux.

e) Menons par le centre  $O$  de  $\alpha$  deux droites qui coupent  $\alpha$  aux points  $A, B$  et  $\xi$  aux points  $C, D$  ; alors les triangles  $OAB$  et  $OCD$  sont semblables, et par conséquent  $AB$  est parallèle à  $CD$ .

## LES THÉORÈMES A DROITE :

$a_1$ ) Les ellipsoïdes  $\alpha_1$  et  $\xi_1$  sont rencontrés par tout plan sécant  $s_1$  en deux ellipses  $g_1$  et  $l_1$  qui sont concentriques homothétiques comme étant alliées aux circonférences concentriques  $g$  et  $l$ .

$b_1$ ) Les points milieux d'une gerbe de cordes parallèles de  $\alpha_1$  et  $\xi_1$  sont tous situés sur un plan diamétral commun.

$c_1$ ) Les centres des couples d'ellipses concentriques homothétiques déterminées sur les ellipsoïdes  $\alpha_1$  et  $\xi_1$  par un faisceau de plans sécants parallèles, sont tous situés sur un diamètre commun des deux ellipsoïdes.

$d_1$ ) Les quatre plans tangents construits aux extrémités d'un diamètre quelconque de  $\alpha_1$  et  $\xi_1$  sont parallèles entre eux.

$e_1$ ) Soient  $O_1, A_1, B_1, C_1$  et  $D_1$  les points correspondants dans  $\Sigma_1$ , il résulte de  $e$ ) que  $AB$  est parallèle à  $CD$ , et à cause de la similitude des triangles  $O_1 A_1 B_1$  et  $O_1 C_1 D_1$  nous avons la proportion :

$$O_1 A_1 : O_1 C_1 = O_1 B_1 : O_1 D_1$$

Donc :

Les rayons des ellipsoïdes  $\alpha_1$  et  $\xi_1$  sont coupés par les surfaces en parties proportionnelles.

*f)* Les pôles d'un plan quelconque  $\pi$  par rapport aux deux sphères  $z$  et  $\zeta$  sont situés sur le diamètre perpendiculaire et conjugué à ce plan.

*g)* Les plans polaires d'un point  $P$  par rapport aux deux sphères  $z$  et  $\zeta$  sont perpendiculaires au diamètre qui passe par le point  $P$  et par conséquent parallèles entre eux.

*h)* Les quatre plans polaires de deux points quelconques par rapport à  $z, \zeta$  se coupent suivant quatre droites parallèles.

*$f_1$ )* Les pôles d'un plan quelconque  $\pi_1$  par rapport aux deux ellipsoïdes  $z_1$  et  $\zeta_1$  sont situés sur le diamètre conjugué à ce plan.

*$g_1$ )* Les plans polaires d'un point  $P_1$  par rapport aux deux ellipsoïdes  $z_1$  et  $\zeta_1$  sont parallèles entre eux.

*$h_1$ )* Les quatre plans polaires de deux points quelconques par rapport à  $z_1, \zeta_1$  se coupent suivant quatre droites parallèles.

Supposons maintenant dans le système  $\Sigma$  tout le faisceau des sphères concentriques à la sphère  $z$ , et nous aurons pour correspondant dans le système allié  $\Sigma_1$  un « faisceau d'ellipsoïdes concentriques homothétiques ».

D'après ce qui précède, nous sommes en état maintenant d'énoncer le résultat général que voici :

« Les ellipsoïdes d'un faisceau  $F$  d'ellipsoïdes concentriques  
 « homothétiques ont la même gerbe polaire des diamètres et les  
 « mêmes axes principaux. Le faisceau est déterminé par un seul  
 « ellipsoïde. Le centre de cet ellipsoïde est le centre commun de  
 « similitude. Nous obtiendrons un ellipsoïde concentrique homo-  
 « thétique au premier en augmentant ou en diminuant ses rayons  
 « dans un rapport donné. Par un point quelconque de l'espace on  
 « peut faire passer un seul ellipsoïde du faisceau  $F$ . Tout plan  
 « coupe le faisceau suivant des ellipses concentriques homothé-  
 « tiques et est tangent à un ellipsoïde du faisceau au centre  
 « commun des mêmes ellipses. Les centres des coniques déter-  
 « minées sur les ellipsoïdes, par un système de plans sécants  
 « parallèles sont tous situés sur un seul et même diamètre. Les  
 « points milieux d'une gerbe de cordes parallèles sont tous  
 « situés sur un seul et même plan diamétral. Les plans tangents  
 « aux ellipsoïdes du faisceau  $F$  construits dans les extrémités  
 « d'un diamètre, sont tous parallèles. Les pôles d'un plan quel-  
 « conque par rapport aux ellipsoïdes du faisceau sont tous situés  
 « sur un seul et même diamètre, et les plans polaires d'un point  
 « quelconque forment un faisceau de plans parallèles. Les plans

« polaires de deux points quelconques par rapport aux ellipsoïdes du faisceau F se coupent suivant une gerbe de droites parallèles. »

Pour terminer, nous mentionnons encore les propositions suivantes :

« 1° Les sommets de tous les parallélépipèdes circonscrits à un ellipsoïde et dont les faces sont tangentes à l'ellipsoïde aux extrémités de trois diamètres conjugués quelconques sont tous situés sur un ellipsoïde concentrique homothétique au premier. »

« 2° Les sommets de tous les cônes circonscrits à un ellipsoïde qui limitent avec les plans de leurs ellipses de contact des solides de volume donné, sont tous situés sur un second ellipsoïde, concentrique, homothétique au premier. » (Reye.)

Pour démontrer ces deux propositions, nous n'avons qu'à allier les ellipsoïdes à des sphères. Dans le premier cas nous trouverons comme lieu des sommets des cubes correspondant aux parallélépipèdes, une sphère concentrique à la première ; et de même les sommets des cônes circonscrits à la sphère correspondant aux cônes circonscrits à l'ellipsoïde sont situés sur une sphère concentrique à la première.

D<sup>r</sup> KILBINGER (Mulhouse).

---

## SUR LA DÉMONSTRATION DES FORMULES DU DEMI-ANGLE EN TRIGONOMÉTRIE PLANE

---

Le théorème de Carnot résout en principe le problème fondamental de la Trigonométrie, qui consiste à déterminer les angles d'un triangle dont on connaît les trois côtés. Toutefois la formule obtenue ne se prête guère au calcul logarithmique ; aussi en déduit-on d'ordinaire les formules dites du demi-angle, en ayant recours à des transformations algébriques.