Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 2 (1900)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: UNE PREMIÈRE LEÇON DE DYNAMIQUE
Autor: Picard, Émile
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-3550

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 09.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

UNE PREMIÈRE LEÇON DE DYNAMIQUE [1]

Par M. Émile PICARD

1. Etudions d'abord le mouvement d'une portion de matière assez petite pour qu'on puisse la regarder, sans erreur sensible, comme réduite à un point ; c'est ce que nous appellerons un point matériel. Cette étude ne peut être entreprise sans faire certaines hypothèses et sans admettre certains *principes*, qu'il est impossible de vérifier directement et dont seulement des conséquences plus ou moins lointaines sont réellement susceptibles d'être contrôlées par l'expérience. Sans entrer ici dans aucun détail historique, qu'il me suffise de citer Galilée, Descartes, Huyhgens et Newton, comme les créateurs, à des titres divers, de la science du mouvement.

Principe de l'inertie. Il comprend deux parties :

1° Quand un point matériel est en repos dans l'espace, il reste en repos si aucune action extérieure ne s'exerce sur lui.

2° Quand un point matériel est en mouvement dans l'espace,

---

[1] Cette première leçon de dynamique est celle que je professe à l'Ecole centrale dans mon cours de Mécanique générale. Dans cet enseignement, je dois nécessairement m'abstenir de toute considération historique et critique. Tous ceux qui ont réfléchi sur les principes de la Mécanique connaissent les inextricables difficultés qu'on y rencontre; je me suis placé le plus possible au point de vue expérimental et pratique, en évitant soigneusement de laisser paraître un scepticisme qui est parfois au fond de ma pensée. Jamais, je crois, la critique des principes de la Mécanique n'a été mieux faite que dans le troisième volume des œuvres du célèbre physicien allemand Hertz, *Die Prinzipien der Mechanik in neuem Zusammenhange dargestellt*, Leipzig, 1894 ; le système de Hertz, où les masses *cachées* jouent un rôle essentiel, est une œuvre puissante qui n'est pas assez connue en France, malgré le bel article que lui a consacré M. Poincaré dans la *Revue générale des Sciences*, t. VIII, 1897. Parmi les ouvrages critiques relatifs aux théories de la Mécanique, je me reprocherais de ne pas citer encore l'important ouvrage de M. Mach qui a eu de nombreuses éditions en Allemagne et en Angleterre *Die Mechanik in ihrer Entwickelung historisch-kritisch dargestellt*, et l'Introduction à l'*Etude des théories de la Mécanique*, par M. Bouasse. Carré, 1895. Les *Leçons de Mécanique physique*, de M. Andrade, parues en 1898, renferment aussi d'intéressants chapitres au point de vue critique.

son mouvement est rectiligne et uniforme si aucune action extérieure ne s'exerce sur lui.

Il résulte de là que, si le mouvement d'un point matériel n'est pas rectiligne et uniforme, certaines actions extérieures s'exercent sur lui, et ceci est en quelque sorte une définition. On donne le nom de *forces* à ces actions que l'on regarde comme produisant ou modifiant le mouvement d'un point matériel.

2. Avant de passer à un second principe, nous allons poser d'abord la notion de *champ de forces constantes*. Une portion déterminée de l'espace sera dite un champ de forces, si un point matériel abandonné à lui-même en un point arbitraire de ce champ ne reste pas en repos. Le champ de forces sera dit constant, si un point matériel abandonné en un point quelconque sans vitesse initiale et à un instant quelconque, décrit toujours la même trajectoire (transportée seulement parallèlement à elle-même) et de la même manière. La pesanteur offre, dans le vide et pour un espace *assez petit*, un exemple de champ constant.

Cette notion acquise, nous posons maintenant le second principe, dans l'énoncé duquel *il ne s'agit que de champ de forces constantes*.

Si un point matériel se trouve à la fois dans plusieurs champs de forces constantes, le mouvement que prend le point à partir d'un certain instant s'obtient en composant cinématiquement le mouvement rectiligne et uniforme dû à la vitesse initiale et les mouvements que produirait chacun des champs s'il agissait seul sur le point matériel partant du repos.

Ainsi, supposons qu'un point matériel occupe à un moment t la position A avec une vitesse V_0 et qu'il se trouve à la fois dans deux champs de forces constantes. Soit B la position qu'occuperait au bout du temps $t + \theta$ le point matériel soumis seulement au premier champ et abandonné en A sans vitesse ; soit de même B′ la position correspondant au second champ dans les mêmes conditions, soit enfin B″ l'extrémité du segment obtenu en portant une longueur $V_0\theta$ sur la direction de la vitesse V_0. On obtiendra la position véritable du mobile au temps $t + \theta$ en faisant la somme géométrique des trois vecteurs AB, AB′ et AB″.

On voit que chaque champ agit, en quelque sorte, comme s'il

était seul et si le point n'avait pas eu une vitesse initiale V_0 ; aussi le principe précédent peut-il être appelé *le principe de l'indépendance de l'effet des forces et du mouvement antérieurement acquis*. Mais dans l'application du principe, sous la forme que nous venons de lui donner, il est essentiel de se rappeler qu'il s'agit seulement de champ de *forces constantes*.

3. Supposons en particulier qu'il n'y ait qu'un seul champ. On devra composer le déplacement $V_0\theta$ dû à la vitesse acquise avec le déplacement résultant de l'action du champ sur le point placé en A et partant du repos. Soit Γ la trajectoire du point matériel placé en A au temps t sans vitesse initiale, trajectoire qui sera parcourue suivant une certaine loi. On peut se représenter le mouvement de la manière suivante :

Imaginons que la courbe Γ se déplace d'un mouvement de translation uniforme avec la vitesse V_0, pendant que notre mobile se déplace sur la courbe suivant la loi convenable ; on aura ainsi la trajectoire véritable.

Pour le cas simple qui précède, on peut imaginer facilement des vérifications expérimentales du principe. Dans un wagon animé d'un mouvement de translation uniforme, un point pesant abandonné sans vitesse relative rencontre le plancher du wagon toujours au même point, quelle que soit la vitesse du mouvement de translation. Il doit bien en être ainsi, d'après le second principe, puisque la trajectoire relative du point tombant par rapport au wagon est la trajectoire du point quand le wagon reste au repos.

4. Le second principe nous permet de trouver la nature du mouvement d'un point matériel dans un champ de forces constantes. On a vu en cinématique que si un point a un mouvement relatif par rapport un système animé d'un mouvement *de translation*, l'accélération absolue du point est la somme géométrique de l'accélération relative et de l'accélération d'entraînement. Appliquons ce résultat à notre problème actuel, où le mouvement de translation de la courbe Γ est uniforme ; l'accélération absolue du mobile à l'instant $t + \theta$ sera égale à son accélération relative sur la courbe Γ. Faisons, en particulier, $\theta = 0$; l'accélération

absolue du point au temps t sera égale à l'accélération qu'a au départ le point matériel partant du repos et soumis au champ considéré. Elle a donc une valeur constante, et nous arrivons ainsi à ce résultat très important, que *le mouvement d'un point matériel dans un champ de forces constantes est un mouvement dont l'accélération est constante.* On aura donc

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \alpha, \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = \beta, \qquad \frac{d^2z}{dt^2} = \gamma.$$

Si le point part du repos et est placé à l'origine, on déduit de là immédiatement

$$x = \frac{\alpha t^2}{2}, \qquad y = \frac{\beta t^2}{2}, \qquad z = \frac{\gamma t^2}{2}.$$

La trajectoire sera rectiligne ; en la prenant comme axe des z, on aura $\alpha = \beta = 0$, et nous avons finalement

$$z = \frac{\gamma t^2}{2}.$$

Le mouvement est uniformément accéléré et d'accélération γ. La direction de la droite, trajectoire du point, sera dite *la direction* du champ de forces.

5. Le point matériel A, *restant toujours le même*, les différents champs de forces se distingueront les uns des autres par leur direction et l'accélération du mouvement. Nous prendrons, comme mesure des forces agissant sur le point *déterminé* A dans chacun de ces champs, des quantités proportionnelles aux accélérations

$$\gamma, \ \gamma', \ \ldots, \ \ldots$$

et si l'on appelle $f, f', \ldots$ ces forces, on aura *par définition*

$$\frac{f}{\gamma} = \frac{f'}{\gamma'} = \ldots = \ldots$$

et elles auront, par définition, pour direction les directions de ces accélérations.

Nous pouvons facilement trouver le champ résultant de la superposition de deux champs de forces constantes. Supposons qu'un point, partant du repos, soit placé simultanément dans deux

champs de forces constantes. Quel mouvement prendra-t-il ? Supposons que Ox représente la direction du premier champ, et Oy la direction du second champ. Si le premier champ agissait seul, on aurait par rapport aux deux axes Ox et Oy la trajectoire

$$x = \frac{\gamma t^2}{2}, \qquad y = 0,$$

et si le second champ était seul actif

$$x = 0, \qquad y = \frac{\gamma' t^2}{2}.$$

Donc, quand les deux champs agissent simultanément, on a, d'après le second principe

$$x = \frac{\gamma t^2}{2}, \quad y = \frac{\gamma' t^2}{2}.$$

Le mouvement est donc encore uniformément accéléré, et l'accélération est la somme géométrique des deux accélérations γ et γ', d'où se déduit de suite la règle du parallèlogramme des forces.

6. La définition *dynamique* de la force dans un champ constant, que nous venons de donner en ayant égard au mouvement produit, n'est pas celle qui s'est présentée la première au point de vue historique. L'idée de force provient de la notion de l'effort que nous faisons quand nous supportons un fardeau, ou tirons sur une corde fixée par exemple à un clou. Si nous pouvions évaluer avec précision l'effort fait pour supporter différents poids nous pourrions nous servir de cet effort pour mesurer les forces. Mais un effort est aussi une cause de déformation ; appliqué à un corps solide il en change la figure. Soit considéré un ressort parfaitement élastique, et montrons comment il va pouvoir servir à mesurer les forces au point de vue statique. Plaçons-nous dans le champ de la pesanteur à Paris, et prenons une matière déterminée bien homogène, du platine par exemple. En suspendant au ressort, dont on a orienté l'axe moyen dans le sens de la verticale, des quantités croissantes de platine, nous avons des déformations variables ; or prenons comme unité de force *l'action*

statique sur le ressort d'un volume déterminé de platine. Nous admettons tout naturellement que, pour un volume double, l'action statique sur le ressort est double et ainsi de suite. Nous avons ainsi un instrument (dynamomètre) qui se trouve gradué et avec lequel nous pouvons évaluer les actions statiques. Or reprenons notre point matériel A de tout à l'heure, et considérons un champ de forces constantes ; avec le ressort, dont on place l'axe moyen dans le sens du champ, et en fixant à son extrémité le point A, nous pouvons évaluer l'action statique du champ sur le point A. Nous avons donc, pour *différents* champs, *différentes* actions statiques ; d'où *une seconde définition, qui est statique, de la force agissant sur le point* A *dans chacun des champs*. Nous regardons, *comme un résultat expérimental*, que les nombres représentant les forces envisagées au point de vue dynamique et au point de vue statique sont proportionnels. C'est là un résultat capital.

7. *Nous n'avons jusqu'ici considéré qu'un seul point matériel* A. Pour tout autre point matériel, on peut refaire les mêmes expériences ; il s'agit de comparer les points matériels les uns aux autres. Il n'y aurait aucune difficulté si la matière se présentait à nous sous une forme unique ; on pourrait parler, comme le faisait Newton dans la définition de la masse, de la *quantité* de matière. Mais on sait que la matière se présente à nous sous un certain nombre de formes irréductibles les unes aux autres, au moins dans l'état actuel de la science. Or l'expérience apprend, ce qui va être pour nous absolument fondamental, que *dans un même champ l'accélération du mouvement produit, quel que soit le point matériel, est la même*. C'est ce qu'on exprime, pour le champ de la pesanteur, en disant que tous les corps tombent avec la même vitesse dans le vide.

Ceci posé, plaçons-nous dans un champ déterminé d'ailleurs quelconque, et suspendons différents points matériels à l'extrémité de notre ressort gradué. Nous dirons que *ces points ont des masses égales*, si ils donnent au ressort la même flexion. Il est aisé de voir que si deux points matériels amènent la même flexion dans un certain champ, ils amèneront une même flexion, quoique différente de la première, dans tout autre champ ; en effet les

flexions indiquent des forces que nous avons vues être proportionnelles aux accélérations, et, puisque les accélérations sont les mêmes dans un même champ pour tous les points matériels, si la flexion est la même pour deux points dans un certain champ, elle sera la même dans tout autre champ. De la définition de deux masses égales, résulte la définition d'une masse double, triple,... d'une autre. Une masse sera double, par exemple, d'une autre, si elle donne dans tout champ une déformation correspondant à une action statique double. Nous sommes donc ainsi conduit à attribuer aux différents points matériels M, M',... des coefficients m, m',... que nous appellerons les *masses* de ces points : c'est pour le moment, un système de nombres proportionnels.

8. Il résulte de tout ce qui précède que, dans un même champ, les forces agissant sur deux masses inégales sont proportionnelles à ces masses. D'autre part les forces agissant dans différents champs sur un même point matériel sont proportionnelles aux accélérations des mouvements produits. On en conclut que, dans deux champs d'accélérations γ et γ' et pour deux points de masses m et m', les forces F et F' sont proportionnelles aux produits $m\gamma$ et $m'\gamma'$. Nous avons donc

$$\frac{F}{F'} = \frac{m\gamma}{m'\gamma'}$$

On peut, pour un point déterminé M', prendre $F' = m'\gamma'$; on aura alors, pour tout autre point

$$F = m\gamma$$

c'est-à-dire que le nombre mesurant la force est égal au produit du nombre m mesurant la masse par le nombre mesurant l'accélération.

Si on prend en particulier le champ de la pesanteur, dans un lieu déterminé, à Paris par exemple, la force du champ sur un point de masse m peut être prise égale au poids de cette masse : on écrira donc

$$P = mg$$

g désignant l'accélération de la pesanteur à Paris ($g = 9^{m},808...$ évalué en mètres).

9. Pour avoir des évaluations numériques de forces ou de masses, il faut avoir fait choix d'un système d'unités. Un tel système peut être pris arbitrairement, pourvu que le nombre mesurant la force soit égal au produit du nombre mesurant la masse par le nombre mesurant l'accélération. On prend généralement comme unité de temps la seconde de temps moyen. En mécanique appliquée, le mètre est le plus souvent pris pour unité de longueur et l'unité de force est le *kilogramme-force* c'est-à-dire le poids à Paris d'une masse étalon de platine déposée aux Archives. Dans ces conditions, il est facile de trouver ce que sera la masse *unité ;* puisque

$$m = \frac{P}{g},$$

ce sera la masse d'un point matériel qui pèse à Paris $9^{kg},808$.

En physique générale, on a préféré un autre système. L'inconvénient du système précédent est que l'unité de force (kilogramme-force) est une quantité dont la définition exige l'indication d'un lieu déterminé. La masse d'un corps, qualité physique inhérente à ce corps, se trouve alors représentée par des nombres différents suivant que le kilogramme-force se trouve rapporté à un lieu ou à un autre de la terre.

Le système usité en physique est le système dit C. G. S. L'unité de longueur est la longueur du centimètre. L'unité de la masse est la masse du gramme, c'est-à-dire la masse de la millième partie de l'étalon de platine qui représente le kilogramme. D'après la formule

$$F = m\gamma$$

on voit que l'on aura $F = 1$, si $m = 1$ et $\gamma = 1$. L'unité de force, c'est-à-dire la force représentée par *un*, est la force agissant sur la masse d'un gramme dans un champ dont l'accélération est égale à *un* centimètre. Cette unité de force s'appelle une *dyne*. Il est facile de trouver le rapport entre la dyne et le poids du gramme à Paris. On a, d'après la formule fondamentale

$$\text{Poids du gramme à Paris} = 980{,}8 \text{ dynes (puisque } m = 1).$$

Donc la dyne vaut à peu près un milligramme à Paris.

10. Nous n'avons considéré jusqu'ici que des champs de forces constantes. Quand un point n'est pas animé d'un mouvement à accélération constante, que pouvons-nous regarder comme étant la force agissant sur lui ? Soient M la position du mobile de masse m au temps t sur sa trajectoire et v sa vitesse à cet instant ; soit de plus M′ sa position au temps $t + \Delta t$. Nous allons chercher quelle force constante devrait agir sur le point m placé en M au temps t avec la vitesse v pour qu'il se trouve en M′ au temps $t + \Delta t$. Rappelons-nous une des définitions de l'accélération : si l'on porte sur la tangente en M dans le sens du mouvement une longueur MM″ égale à $v\Delta t$, le vecteur $\frac{2\,\overline{M''M'}}{\overline{\Delta t}^2}$ a pour limite l'accélération. Or si nous considérons une force constante agissant sur le point M partant du repos, le point décrira pendant le temps Δt un segment de droite MN dans la direction de la force, et en appelant γ l'accélération correspondant au champ constant, on aura

$$\overline{MN} = \frac{1}{2}\,\gamma.\,\overline{\Delta t}^2 \quad \text{ou} \quad \gamma = \frac{2.\overline{MN}}{\overline{\Delta t}^2};$$

la force f sera égale à $m\gamma$ et la direction du champ sera celle de MN. D'autre part, d'après le second principe, on obtiendra la position du point au temps $t + \Delta t$, en transportant le segment MN parallèlement à lui-même de manière que M vienne en M″ ; on en conclut de suite que MN est égal et parallèle à M″M′. Si nous considérons maintenant le mouvement réel du point comme la limite d'une succession de mouvements *discontinus* analogues à celui que nous venons d'envisager pendant le temps très petit Δt, nous serons tout naturellement conduit à regarder comme représentant la force au temps t la limite de la force f. En désignant donc par (Γ) l'accélération de M au temps t, et en désignant par (F) la force, *on aura l'égalité géométrique fondamentale*

$$(F) = (m\Gamma)$$

Le vecteur qui représente la force ne diffère donc du vecteur qui représente l'accélération que par le facteur positif m. En désignant par X, Y, Z les composantes de la force, on aura, d'après l'égalité précédente

$$1) \qquad m\frac{d^2x}{dt^2} = X, \quad m\frac{d^2y}{dt^2} = Y, \quad m\frac{d^2z}{dt^2} = Z.$$

11. Il peut sembler au premier abord que les égalités précédentes *définissent* tout simplement X, Y, Z, et on peut se demander quel intérêt elles présentent. Elles ne seront en effet utiles pour renseigner sur le mouvement du point m, que si on connaît *autrement que par ces égalités mêmes*, X, Y, Z.

Voici d'abord un premier cas où l'identité, par nous admise, entre les points de vue statique et dynamique montre l'importance des formules précédentes. Supposons que nous ayons affaire à un champ de force où la force puisse être mesurée statiquement à un instant quelconque et se trouve être seulement une fonction des coordonnées (x, y, z) du point m. Nous pourrons alors dans (1) regarder X, Y, Z comme des fonctions *connues* de x, y, z et l'intégration du système (1), pour une position initiale donnée et une vitesse initiale donnée, nous donnera le mouvement du point correspondant à ces données initiales. Ainsi, pour prendre un exemple très simple, soit un point placé à l'extrémité d'un ressort infiniment petit. Le point se trouve à l'origine sur l'axe Ox, quand le ressort est à l'état naturel. On tend le ressort, l'expérience montre que la force à appliquer au point pour le maintenir en équilibre est proportionnelle au déplacement, c'est-à-dire que la force exercée par le ressort sur le point est représentée par $-\mu x$ $(\mu > 0)$. On a donc l'équation différentielle

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -\mu x$$

dont l'intégration fait connaître le mouvement du point.

On est conduit quelquefois à regarder dans les équations (1) les composantes X, Y, Z de la force comme fonctions non seulement de x, y, z mais aussi de $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$. Il est clair que, dans ce cas, ce ne seront pas des expériences *statiques* préliminaires qui pourront nous faire connaître X, Y, Z. Ce ne pourront être que des expériences *dynamiques*, conduisant le plus souvent à une formule empirique. C'est ce qui arrive dans l'étude du mouvement d'un projectile dans l'air. Il y a une résistance de l'air sur laquelle nous ne savons rien à priori. Un grand nombre d'expériences sont faites, je suppose ; la photographie instantanée permet de savoir dans quelles conditions le point parcourt sa trajec-

toire. On peut donc regarder comme connues la vitesse et l'accélération à chaque instant, de là se déduisent, par les équations (1) elles-mêmes, les valeurs X, Y, Z en dehors de la pesanteur et par conséquent la résistance de l'air. On constate alors que dans certaines conditions de grandeurs de la vitesse, cette résistance est une certaine fonction de la vitesse. Le résultat acquis dans ces expériences déterminées, est regardée (entre les mêmes limites de grandeurs des vitesses) comme général, et le mouvement de tout point m peut être obtenu par l'intégration du système (1), dans lequel on a remplacé X, Y, Z par des expressions fonctions connues de la vitesse.

Des cas de nature différente de ceux que nous venons d'examiner se rencontrent dans la dynamique du point matériel. Le point peut être assujetti à certaines liaisons, à rester par exemple sur une surface. Par le fait de cette liaison, une certaine force se trouve agir sur le point ; ce sera encore à l'expérience à faire connaître certaines propriétés de cette force de liaison, de façon que le système des trois équations (1) achèvent de la déterminer en même temps qu'elles permettent de déterminer le mouvement du point sur la surface.

Ces divers exemples suffisent pour montrer quelle est, quant à la dynamique du point matériel, la signification des équations (1). On la comprendra mieux encore par l'étude des divers problèmes particuliers que nous allons bientôt traiter.

Em. Picard.