

THÉORÈMES DE BEZOUT ET D'EULER

Autor(en): **Poussart, A.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **2 (1900)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **26.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-3558>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

THÉORÈMES DE BEZOUT ET D'EULER

L'établissement de la formule $AU + BV = R_n$ et l'évaluation des degrés des polygones U et V se font généralement d'une façon lourde et pénible ; je me propose de donner une démonstration plus rapide et beaucoup plus facile à présenter.

A polynôme de degré m , B de degré p , $m > p$. La recherche du plus grand commun diviseur donne les identités

$$(1) \quad \left. \begin{aligned} A &= BQ + R \\ B &= RQ_1 + R_1 \\ &\dots\dots\dots \\ &\dots\dots\dots \\ R_{n-2} &= R_{n-1}Q_n + R_n \end{aligned} \right\}$$

ou

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} R &= A - BQ \\ R_1 + RQ_1 &= B \\ R_2 + R_1Q_2 - R &= 0 \\ &\dots\dots\dots \\ &\dots\dots\dots \\ R_n + R_{n-1}Q_n - R_{n-2} \dots\dots &= 0 \end{aligned} \right.$$

1° $AU + BV = R_n$, U et V polynômes entiers.

Je résous le système (2) par rapport à R_n ; le déterminant des inconnues est $\pm I$.

$$(3) \quad \pm R_n = \begin{vmatrix} A - BQ & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 1 \\ B & & 0 & 0 & \dots & \dots & 1 Q_1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 1 Q_2 - 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 1 Q_3 - 1 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & Q_n - 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

d'où

$$R_n = AU + BV.$$

2° Si R_n est de degré q , U est de degré $p - q - 1$ au plus et V de degré $m - q - 1$ au plus.

Le terme de degré le plus élevé dans U est contenu dans $Q_1 Q_2 \dots Q_n$, celui de V dans $QQ_1 \dots Q_n$; je multiplie membre à membre les identités (1).

$$ABRR_1 \dots R_{n-2} = BRR_1 \dots R_{n-1} QQ_1 \dots Q_n + \dots$$

Si on tient compte des facteurs communs aux premiers termes des deux membres, on voit que $QQ_1 \dots Q_n R_{n-1}$ est du degré de A . Or R_n est de degré q , R_{n-1} est donc au moins de degré $q + 1$, par suite $QQ_1 \dots Q_n$ est au plus de degré $m - q - 1$ et comme Q est de degré $m - p$, $Q_1 Q_2 \dots Q_n$ est au plus de degré $p - q - 1$.

CONSÉQUENCES

I. Si R_n est le plus grand commun diviseur, U et V sont premiers entre eux,

R_n contient les facteurs communs à A et B et ne contient qu'eux, donc U et V ne peuvent avoir de facteur commun.

II. Les polynômes U et V sont les seuls polynômes de degré $p - q - 1$, $m - q - 1$ ou de degré inférieur vérifiant la relation $AU + BV = R_n$:

Si on avait

$$AU_1 + RV_1 \equiv R_n$$

on en conclurait :

$$A(u - U_1) \equiv B(V_1 - V).$$

Or A et B ont q facteurs communs, donc les $m - q$ autres facteurs de A devraient diviser $V_1 - V$ qui est de degré $m - q - 1$ au plus.

III. *Théorème de Bezout.* — $AU + BV = 1$. — Si A et B sont premiers entre eux, q degré du plus grand commun diviseur est nul, divisant par R_n ,

$$AU + BV = 1.$$

Les théorèmes I et II s'appliquent encore à U et V .

IV. *Théorème d'Euler.* — La condition nécessaire et suffisante pour que A et B aient un plus grand commun diviseur de degré q , est qu'on puisse trouver deux polynômes premiers entre eux, U de degré $p - q$, V de degré $m - q$ et tels que :

$$AU + BV = 0.$$

1° La condition est nécessaire. Supposons $R_n = 0$, l'identité fondamentale devient

$$AU + BV = 0.$$

Le plus grand commun diviseur est alors R_{n-1} qui est de degré q , il en résulte d'après le n° 2 que U est de degré $p - q$ et V de degré $m - q$.

U et V sont premiers entre eux, car s'ils avaient un commun diviseur du premier degré, on aura après l'avoir supprimé :

$$AU_1 + BV_1 = 0$$

$$U_1 \text{ de degré } p - q - 1 \quad V_1 \text{ de degré } m - q - 1.$$

En admettant que les $p - q - 1$ facteurs de U_1 appartiennent à B, il y aurait encore $q + 1$ facteurs de B qui devraient appartenir à A, ce qui est contre l'hypothèse.

2° La condition est suffisante. V de degré $m - q$ est premier avec U, donc ses $m - q$ facteurs appartiennent à A et il reste q facteurs de A qui appartiennent à B.

A. POUSSART (Paris).
