Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 2 (1900)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: THÉORÈMES DE BEZOUT ET D'EULER

Autor: Poussart, A.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-3558

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 10.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

THÉORÈMES DE BEZOUT ET D'EULER

L'établissement de la formule $AU + BV = R_n$ et l'évaluation des degrés des polygones U et V se font généralement d'une façon lourde et pénible ; je me propose de donner une démonstration plus rapide et beaucoup plus facile à présenter.

A polynôme de degré m, B de degré p, $m > p$. La recherche du plus grand commun diviseur donne les identités

$$(1)\qquad \left\{\begin{array}{l} A = BQ + R \\ B = RQ_1 + R_1 \\ \cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots \\ R_{n-2} = R_{n-1}Q_n + R_n \end{array}\right.$$

ou

$$(2)\qquad \left\{\begin{array}{r} R = A - BQ \\ R_1 + RQ_1 = B \\ R_2 + R_1Q_2 - R = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ R_n + R_{n-1}Q_n - R_{n-2} \ldots\ldots = 0 \end{array}\right.$$

1° $AU + BV = R_n$, U et V polynômes entiers.

Je résous le système (2) par rapport à R_n ; le déterminant des inconnues est $\pm$ I.

$$(3)\qquad \pm R_n = \begin{vmatrix} A - BQ & 0 & 0 & 0 & \cdots & & 1 \\ B & & 0 & 0 & \cdots & & 1 & Q_1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & 1 & Q_2 & -1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & 1 & Q_3 & -1 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & Q_n & -1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}$$

d'où

$$R_n = AU + BV.$$

2° Si R_n est de degré q, U est de degré $p-q-1$ au plus et V de degré $m-q-1$ au plus.

Le terme de degré le plus élevé dans U est contenu dans $Q_1 Q_2 \ldots Q_n$, celui de V dans $QQ_1 \ldots Q_n$; je multiplie membre à membre les identités (1).

$$ABRR_1 \ldots R_{n-2} = BRR_1 \ldots R_{n-1} QQ_1 \ldots Q_n + \ldots$$

Si on tient compte des facteurs communs aux premiers termes des deux membres, on voit que $QQ_1 \ldots Q_n R_{n-1}$ est du degré de A. Or R_n est de degré q, R_{n-1} est donc au moins de degré $q+1$, par suite $QQ_1 \ldots Q_n$ est au plus de degré $m-q-1$ et comme Q est de degré $m-p$, $Q_1 Q_2 \ldots Q_n$ est au plus de degré $p-q-1$.

CONSÉQUENCES

I. Si R_n est le plus grand commun diviseur, U et V sont premiers entre eux,

R_n contient les facteurs communs à A et B et ne contient qu'eux, donc U et V ne peuvent avoir de facteur commun.

II. Les polynômes U et V sont les seuls polynômes de degré $p-q-1$, $m-q-1$ ou de degré inférieur vérifiant la relation $AU+BV=R_n$:

Si on avait

$$AU_1 + RV_1 \equiv Rn$$

on en conclurait :

$$A(u-U_1) \equiv B(V_1 - V).$$

Or A et B ont q facteurs communs, donc les $m-q$ autres facteurs de A devraient diviser $V_1 - V$ qui est de degré $m-q-1$ au plus.

III. *Théorème de Bezout.* — $AU+BV=1$. — Si A et B sont premiers entre eux, q degré du plus grand commun diviseur est nul, divisant par R_n,

$$AU+BV=1.$$

Les théorèmes I et II s'appliquent encore à U et V.

IV. *Théorème d'Euler.* — La condition nécessaire et suffisante pour que A et B aient un plus grand commun diviseur de degré q, est qu'on puisse trouver deux polynômes premiers entre eux, U de degré $p - q$, V de degré $m - q$ et tels que :

$$AU + BV = 0.$$

1° La condition est nécessaire. Supposons $R_n = 0$, l'identité fondamentale devient

$$AU + BV = 0.$$

Le plus grand commun diviseur est alors R_{n-1} qui est degré q, il en résulte d'après le n° 2 que U est de degré $p - q$ et V de degré $m - q$.

U et V sont premiers entre eux, car s'ils avaient un commun diviseur du premier degré, on aura après l'avoir supprimé :

$$AU_1 + BV_1 = 0$$

U_1 de degré $p - q - 1$ $\qquad$ V_1 de degré $m - q - 1$.

En admettant que les $p - q - 1$ facteurs de U_1 appartiennent à B, il y aurait encore $q + 1$ facteurs de B qui devraient appartenir à A, ce qui est contre l'hypothèse.

2° La condition est suffisante. V de degré $m - q$ est premier avec U, donc ses $m - q$ facteurs appartiennent à A et il reste q facteurs de A qui appartiennent à B.

A. Poussart (Paris).