Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 2 (1900)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: L'ENSEIGNEMENT DE LA GÉOMÉTRIE ET LES GÉOMÉTRIES NON-EUCLIDIENNES

Autor: Andrade, Jules

Kapitel: II GÉOMÉTRIE QUALITATIVE ET GÉOMÉTRIE MÉTRIQUE AU POINT DE VUE EUCLIDIEN

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-3555

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 23.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

ensuite comment nous pourrons seconder le développement naturel de ce rôle dans l'enseignement *élémentaire* et dans l'enseignement *moyen*.

Questions pédagogiques ? Sans doute, mais ne sait-on pas combien cet humble mot effleure, sans fracas, la philosophie même de la science ?

Et nous savons encore que le cerveau vierge de l'adolescent, éminemment apte à sentir la dignité ou la frivolité des méthodes, peut recevoir de sa première initiation une empreinte ineffaçable.

La Géométrie est la première philosophie de l'enfant, la plus accessible à ses sens et à son imagination. Cette première école de logique doit être, à la fois, simple, intuitive, probe ; et dans la Géométrie primaire mieux vaut énoncer un postulat de plus qu'un axiome de moins.

La Géométrie de l'enfant doit évidemment rester euclidienne sous peine de le trop dépasser, mais le postulatum d'Euclide doit déjà lui être présenté comme un choix de l'esprit ; les besoins d'une représentation simple ont fait désirer à l'homme l'existence de la similitude et ont dirigé la Géométrie d'Euclide ; on peut déjà le faire pressentir à l'enfant.

Au contraire, la Géométrie de l'adolescent, celle qui appartient à l'enseignement moyen peut être facilement dépouillée de la spécialisation euclidienne et être exposée très simplement comme je le montrerai plus loin.

II

GÉOMÉTRIE QUALITATIVE ET GÉOMÉTRIE MÉTRIQUE AU POINT DE VUE EUCLIDIEN

On se rend compte du degré de perfection relative de l'œuvre d'Euclide quand on la compare à l'œuvre géométrique de Legendre. Cet analyste distingué avait cru améliorer Euclide en prenant comme définition de la droite la propriété d'être plus court chemin entre deux de ses points. Je crois inutile de rappeler ici les critiques très fondées qui furent faites à cette malheureuse et illogique définition ; je ferai seulement remarquer que si Legendre a mal défini la genèse des premiers principes de la Géométrie, on peut cependant trouver dans son erreur même le germe d'un nouveau postulat qu'il est nécessaire de souligner ici.

Pour être plus clair, rappelons d'abord comment on définit la droite après avoir guidé l'intuition de l'élève sur la signification des trois dimensions de l'espace :

Une ligne droite est un ensemble continu de points d'un corps rigide, ensemble qui peut rester immobile bien que le corps se meuve ; cet ensemble jouit des propriétés essentielles suivantes :

Un segment quelconque de cette ligne envisagé dans ses deux sens de parcours *peut être superposé* à un second segment de droite d'origine et de sens arbitraires.

On peut alors définir la longueur d'un segment et formuler cette autre propriété de la droite qui est sa définition logique :

Si les deux points A *et* B *font partie d'une droite et sont les extrémités d'un segment de longueur moindre que* l (l *désignant une longueur fixe mais suffisamment réduite*), *il n'existera qu'une droite possédant les deux points* A *et* B ; *et* (*au cas où la droite serait une courbe fermée*) *sur cette droite un seul segment ayant* A *et* B *pour extrémités aura une longueur moindre que* l.

La longueur de ce segment s'appellera la distance AB.

Après la définition de la droite on fera connaître l'existence du plan ou de la trame triangulaire considérée comme triple trame de droites. L'étude approfondie de cette trame met en jeu le postulat suivant *tacitement admis* dans les démonstrations usuelles.

Soit O un point quelconque, considérons deux segments rectilignes OA et OB passant par ce point, il existe une longuenr fixe m (moindre que l) qui est telle que si les segments OA et OB sont moindre que m on pourra affirmer que :

1° Les deux points A et B seront à une distance réduite moindre que l, suffisante pour définir une droite ;

2° La *distance* de ces deux points étant représentée par AB on aura, en désignant par K un nombre fixe :

$$AB < K(OA + OB)$$

Ce postulat permet par un procédé de cheminement de ne considérer d'abord que des figures situées dans un domaine D fini, mais suffisamment voisin d'un point O et d'appliquer à l'ensemble des points contenus dans ce domaine la proposition suivante.

Dans un domaine D toute droite AB d'un plan sépare ce plan en deux régions R_1 et R_2 dont voici la propriété : si deux points M et M′ appartiennent à une même région, le segment propre qui joint M et M′ ne rencontre pas AB. Si deux points M et M′ appartiennent à deux régions distinctes le segment propre qui les joint rencontre AB.

Bien entendu on conserve le postulat du double mode de recouvrement des angles plans égaux, le postulat qui définit la rotation égale à un tour, et celui relatif à la propriété du demi-tour.

On peut alors exposer toute la partie de la Géométrie qui est indépendante du postulatum d'Euclide ; c'est ce qu'on peut appeler la Géométrie *qualitative* ou mieux *la Géométrie du cheminement*, l'épithète *qualitative* restant alors réservée à l'*Analysis situs*.

Cette partie de la Géométrie est, depuis la détestable classification de Legendre, répartie dans les livres I et V et sur la Géométrie non métrique de la sphère, mais cet ensemble de la Géométrie non métrique qui réunit le triangle et le trièdre doit former le *premier livre* de la Géométrie naturelle.

En particulier, toute distinction entre une Géométrie plane et une Géométrie de l'espace est illogique car l'étude de la Géométrie dite plane nécessite des déplacements de figure hors du plan où l'on voudrait en vain se cantonner, que ces déplacement soient d'ailleurs possibles ou définis. En d'autres termes la notion d'orientation qui appartient déjà à l'étude du plan exige que l'observateur ait déjà prise sur l'espace à trois dimensions avant même de s'attacher au plan. — Parmi les théorèmes du premier livre de la Géométrie naturelle dont je viens d'esquisser l'allure il en est un qui offre à mes yeux une importance capitale : je veux parler du théorème d'Euler sur les déplacements finis d'un solide cloué sur un de ses points, c'est-à-dire de la composition des rotations finies, envisagées dans un certain ordre.

A ce théorème, en effet, on peut rattacher la naissance du second livre de la Géométrie naturelle ; cette Géométrie quantitative a pour objet la fixation des propriétés métriques.

Habituellement celles-ci sont reliées par *la similitude* au fameux postulatum d'Euclide ; mais je crois qu'il est préférable même dans la Géométrie élémentaire de faire apparaître la similitude et le postulatum d'Euclide comme la conséquence directe de l'adoption du mode le plus simple de *composition* pour les vecteurs d'un plan perpendiculaires à une même droite. L'idée de la composition des vecteurs et l'existence de leur groupe d'équivalence peuvent être présentées d'une manière extrêmement simple, et alors même que l'on ne voudra pas les conduire jusqu'à la théorie des fonctions circulaires, on peut en présenter l'origine assez nettement pour faire comprendre au débutant que la Géométrie euclidienne qu'il étudie dérive d'un choix entre plusieurs Géométries dont on ne le fatiguera pas.

J'indiquerai brièvement l'esprit de cette méthode.

Envisageons *dans un certain ordre* plusieurs vecteurs V_1, V_2, ... V_K, et concevons que les longueurs de ces vecteurs soient la représentation de nombres fixes, n_1, n_2, n_K proportionnels aux rotations respectives et simultanées d'un premier solide S_1 tournant sur V_1 par rapport à un solide de repère S_0, puis d'un second solide S_2 tournant sur V_2 par rapport à S_1, etc., etc.

Nous pourrons alors concevoir que les nombres n_1, n_2, ... n_K soient à l'égard d'une variable auxiliaire t variant toujours dans le même sens, les mesures des vitesses constantes de ces rotations continues dont nous venons de parler et qui appartiennent à des systèmes solides successivement emboîtés les uns dans les autres.

Les postulats de la Géométrie métrique vont être alors les suivants :

Nous admettons d'abord que dans le mouvement ci-dessus défini du solide S_K par rapport à S_0 un point quelconque du solide aura à chaque instant *une vitesse*.

Nous admettons ensuite que :

La vitesse d'un point M dans un domaine D d'un solide S_K animé des mouvements de rotation ci-dessus définis varie d'une manière continue lorsque ce point M se déplace dans le domaine D.

Et, en se reportant à la définition de la *translation* non euclidienne d'un solide le long d'une droite donnée, *axe de translation*, voici d'une manière précise ce qu'il faut entendre par la *variation continue* d'un vecteur appliqué en M :

Soit R un vecteur appliqué en M et fonction de la position de M; soit R′ ce que devient ce vecteur quand son point d'application est devenu M′.

Si lorsque MM′ tend vers zéro la différence des longueurs de R et de R′ tend vers zéro, et si la droite R fait *après une translation d'axe MM′* un angle avec R′ qui tend aussi vers zéro, on dira que le vecteur R varie d'une manière continue.

La continuité de la variation de R est d'ailleurs uniforme dans tout domaine D où R ne s'annule pas.

On peut alors, au moyen du théorème d'Euler de la Géométrie qualitative, démontrer que les rotations continues définies plus haut, produisent dans le solide final S_K une distribution des vitesses qui est indépendante de l'ordre des emboîtements successifs des systèmes $S_1, S_2, \dots S_K$.

Et en particulier on conclut de là qu'il existe *pour des vecteurs concourants* un mode de composition, mode continu, invariant, commutatif, associatif, et se réduisant sur une même droite à l'addition algébrique des segments.

Pour rechercher ce mode de composition on remarquera d'abord que le *vecteur résultant* de deux vecteurs concourants est dans le plan de ceux-ci et passe par leur point de concours, puis en considérant autour d'un point O et dans un même plan un vecteur R variable qui fait respectivement les angles α et β complémentaires avec deux axes rectangulaires OX et OY, on pourra représenter les deux composantes X et Y par deux fonctions associées

$$g(\alpha) \text{ et } h(\alpha) \qquad h(\alpha) = g(1^{\text{droit}} - \beta)$$

au moyen des formules

$$X = Rg(\alpha), \qquad Y = Rh(\alpha)$$

alors, les conditions de composition sont, on le vérifie aisément, exprimées par les équations fonctionnelles et les conditions initiales suivantes :

$$(1) \quad \begin{cases} h(\alpha+\beta) = h(\alpha)\,g(\beta) + h(\beta)\,g(\alpha) & g(0) = 1 \quad g(1^{\text{droit}}) = 0 \\ g(\alpha+\beta) = g(\alpha)\,g(\beta) - h(\alpha)\,h(\beta) & h(0) = 0 \quad h(1^{\text{droit}}) = 1 \\ g(\alpha+\beta) + g(\alpha-\beta) = 2g(\alpha)\,g(\beta) & \end{cases}$$

On démontre que ces conditions déterminent d'une manière unique les fonctions g et h, et cette démonstration peut se faire sans achever la détermination des fonctions, supposées simplement contenues.

Un vecteur, vitesse de rotation, n'ayant pas de point d'application déterminé sur la ligne qui le porte, on est conduit alors tout naturellement à la notion de l'existence d'un groupe d'équivalence pour tout système de vecteurs donné.

Et pour achever de constituer ce groupe d'équivalence il reste à composer les vecteurs d'un plan qui sont perpendiculaires à une même droite ; la question d'ailleurs se ramène au cas particulier de la composition de deux vecteurs égaux P perpendiculaires (d'un même côté) aux extrémités d'une même droite de longueur $2\,x$, le résultant de ces vecteurs perpendiculaire au segment $2\,x$ en son milieu a une intensité qui est nécessairement de la forme :

$$2\mathrm{PF}\,(x)$$

et la fonction F doit satisfaire aux conditions :

$$(2) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \mathrm{F}\,(x+y)+\mathrm{F}\,(x-y)=2\mathrm{F}\,(x)\,\mathrm{F}\,(y) \\ \mathrm{F}\,(0)=1 \end{array} \right.$$

la fonction F (x) satisfait donc à la même équation fonctionnelle que la fonction $g\,(\alpha)$, et de même que l'on avait $g\,(0)=1$ on a encore F $(0)=1$.

Mais la condition $g\,(1^{\mathrm{droit}})=0$ n'a plus ici son analogue pour la fonction F (x).

La fonction F (x) aura donc une détermination plus générale que la fonction $g\,(\alpha)$.

Adoptons pour F (x) la *détermination très particulière*

$$\mathrm{F}\,(x)=\mathrm{F}\,(0)=1$$

et montrons qu'elle entraîne la Géométrie euclidienne.

A cet effet, revenons à nos deux vecteurs P, et aux extrémités A et B de leur perpendiculaire commune, ajoutons deux vecteurs φ égaux et contraires ayant AB comme droite de support; nous avons formé un groupe de quatre vecteurs équivalent au groupe primitif.

Or les deux vecteurs φ et P appliqués en A se composent en une résultante partielle R′ appliquée en A, inclinée de α sur la droite AB et l'on aura

$$P = R'h(\alpha)$$

Si les deux résultantes partielles se rencontrent sur la résultante générale R sous l'angle 2β, la décomposition de chaque résultante R′ suivant la ligne qui porte R et suivant la perpendiculaire à celle-ci donne :

$$R = 2R'g(\beta)$$

donc :

$$R = 2P\frac{g(\beta)}{h(\alpha)},$$

mais par le choix de $F(x) = 1$ on a aussi :

$$R = 2P$$

donc enfin :

(3) $g(\beta) = (\alpha)$ donc après une discussion facile $\alpha + \beta = 1^{\text{droit}}$.

donc la somme des trois angles d'un triangle rectangle est égale à deux droits, et on en déduit aisément le postulatum d'Euclide.

On aurait pu encore opérer plus vite ainsi : les deux vecteurs P coupent une seconde perpendiculaire à leur résultant sous un même angle ω, si $2p$ est le segment AB et si $2q$ est le segment analogue détaché par les vecteurs P sur la seconde perpendiculaire A′B′ ; en appliquant les deux vecteurs respectivement en A′ et B′ on trouve pour l'intensité du vecteur résultant :

$$2Ph(\omega)\,F(q)$$

on aurait donc :

$$2Ph(\omega)\,F(q) = 2PF(p)$$

mais si $F = 1$ on aura :

$$(h(\omega) = 1$$

d'où on conclut facilement :

(4) $$\omega = 1^{\text{droit}}$$

et on tirerait même conclusion de l'équation (4) que de l'équation (3).

Indiquons maintenant la génération directe de la trigonométrie plane.

Nous nous appuierons à cet effet sur les théorèmes suivants qui découlent des postulats déjà utilisés.

Théorème I. — La vitesse d'un même point qui est due à la résultante de plusieurs rotations composantes est un vecteur qui est la résultante des vitesses dues aux rotations composantes.

Théorème II. — Lorsqu'un solide se déplace d'une manière continue, le travail d'un vecteur entraîné avec le solide est indépendant du point d'application que l'on voudra attribuer à ce vecteur.

Ces théorèmes renferment, avec le théorème du travail virtuel pour les corps rigides, la Trigonométrie plane de la Géométrie générale; mais nous nous plaçons pour le moment dans le cas euclidien de $F = 1$.

Considérons d'abord deux couples de vecteurs qui auraient même axe mais dont les bras de levier portés par la même droite auraient deux longueurs distinctes $2p$ et $2q$, soient P et Q les intensités respectives des vecteurs dans les deux couples.

La condition d'équivalence des deux couples, toujours sous l'hypothèse $F(x) = 1$, est :

$$Pp = Rq.$$

on obtient une seconde condition d'équivalence en appliquant ensuite le théorème du travail virtuel à ces deux couples équivalents ; puis en comparant les deux conditions d'équivalence on voit que la vitesse d'un point qui tourne à une distance r d'un axe de rotation animé d'une vitesse angulaire n est de la forme

$$\lambda nr$$

λ étant une constante qui dépend de l'unité d'angle.

Ceci posé, considérons maintenant un triangle ABO rectangle en A, et un vecteur V dirigé suivant le côté BA ; le travail virtuel du vecteur V tournant autour de O d'un angle θ sera, suivant qu'on considère le vecteur comme appliqué en A ou comme appliqué au sommet de l'angle B du triangle :

$$\lambda\theta b \qquad \text{ou bien} \qquad \lambda\theta ah\,(B)$$

en égalant ces deux expressions on aura donc :

$$b = ah\,(\acute{B}),$$

formule qui renferme avec la similitude, la Trigonométrie plane quand on lui adjoint le résultat trouvé déjà tout à l'heure.

Enfin, pour terminer ce paragraphe, j'indiquerai comment la seule Géométrie qualitative fournit la Trigonométrie sphérique : il suffit pour cela de décomposer un même vecteur issu de O suivant deux systèmes d'axes OX, OY, OZ ; OX', OY', OZ' ayant en commun les axes OX et OX' et de comparer les deux modes *équivalents* de décomposition.

III

LES GÉOMÉTRIES NON EUCLIDIENNES DANS L'ENSEIGNEMENT MOYEN

Si l'on considère, et tel est mon avis, la notion d'intégrale définie comme plus simple que la notion des séries entières, on pourra ramener la recherche de la fonction g à celle de la fonction F.

La fonction F étant continue est intégrale, posons alors :

$$\chi(x)=\int_0^x \mathrm{F}(u)\,du$$

envisageons ensuite deux vecteurs P et R perpendiculaires *de même sens* aux extrémités d'une droite AB de longueur c, supposons d'ailleurs que la droite AB soit considérée de longueur assez réduite pour que l'on ait, pour $0 < x \leq \mathrm{AB}$:

$$\mathrm{F}(x) > 0$$

on voit alors aisément que l'on peut déterminer un vecteur ϖ et deux longueurs a et b de manière que l'on ait :

$$\begin{aligned} \mathrm{P} &= 2\varpi\chi(b) \\ \mathrm{Q} &= 2\varpi\chi(a) \\ c &= a+b. \end{aligned}$$

la méthode donnée par Archimède pour la composition des forces parallèles euclidiennes nous montrera ici que :

1° Sur AB le point d'application C de la résultante R des forces P et R sera aux distances respectives a et b des extrémités A et B.