

<b>Zeitschrift:</b>	L'Enseignement Mathématique
<b>Herausgeber:</b>	Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
<b>Band:</b>	2 (1900)
<b>Heft:</b>	1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE
 <b>Artikel:</b>	 SUR LE DÉVELOPPEMENT ET L'ÉTAT ACTUEL DE LA GÉOMÉTRIE A n DIMENSIONS
<b>Autor:</b>	Schlegel, Dr Victor
<b>Kapitel:</b>	II
<b>DOI:</b>	<a href="https://doi.org/10.5169/seals-3554">https://doi.org/10.5169/seals-3554</a>

#### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 22.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## II

Ce qui précède permet de constater la grande diversité de directions qu'ont suivies les premières recherches sur les espaces à dimensions multiples durant une période d'environ quinze ans (1871-1886). Depuis lors, les difficultés du début étant surmontées et les arguments des contradicteurs réfutés, l'activité scientifique a produit une si riche littérature que, dans un simple aperçu historique comme celui-ci, il nous est impossible de mentionner autre chose que les traits fondamentaux et les résultats caractéristiques de ces travaux.

Bien que d'une manière générale, la  $G_n$  ait obtenu gain de cause, divers travaux ont pour objet de démontrer que cette science est un développement logique et progressif de la Géométrie (202, 333); d'autres tendent à écarter des méprises ou à expliquer comment les géomètres conçoivent l'espace à plusieurs dimensions et, en particulier, l'espace à quatre dimensions (252, 147, 240, 183). Il existe de nouveaux procédés qui, par une transformation à l'espace ordinaire, rendent représentable la Géométrie des hyperespaces (430, 131, 258, 256). Réciproquement, par un passage inverse, des problèmes trouvent leur solution. KLEIN (207), par exemple, définit les coefficients d'une équation du  $n^{\text{ième}}$  degré, comme coordonnées ponctuelles variables dans un  $R_n$ , et par ce moyen rend possible le dénombrement des racines réelles. FANO (124) considère une congruence de droites du  $n^{\text{ième}}$  ordre et de  $n^{\text{ième}}$  classe, comme une  $M_2^{m+n}$  dans une  $M_4^2$  du  $R_5$ . FRATTINI appelle (137), « groupes de  $k$  dimensions », ceux dont les éléments peuvent être caractérisés par  $k$  indices. SEGRE (389) considère les groupes de  $k$  points pris isolément dans  $k$  espaces,  $R_p$ ,  $R_q$ , ..., comme éléments d'une  $M_\varsigma$  (où  $\varsigma = p + q + \dots$ ). Les *applications à la Physique* ne font pas non plus défaut. BALL (16) cherche, pour expliquer la nature de l'éther et de la pesanteur, à obtenir un corps homogène élastique, par le principe d'un mouvement infiniment petit dans une quatrième dimension. STAECHEL (407) fait correspondre à chaque problème de Dynamique celui d'un mouvement d'un point dans un

$R_n$ , dont la solution dépend du même problème analytique ; il traite (407) une classe remarquable de mouvements dans un  $R_n$ , et peut ainsi suivre intuitivement le cours du mouvement.

BRUNEL (57), ANDRADE (6), JOLY (185) s'occupent de *généralisations analytiques*, KILLING (190) étudie de nouvelles configurations se rattachant à cette Géométrie. DICKSTEIN (106) et GALDEANO (138, 139) fournissent des documents sur la littérature du sujet.

SCHENDEL (323) remarque que les *déterminants* de rangs supérieurs déjà étudiés par von Escherich, trouvent leur représentation naturelle par un groupement de leurs éléments à l'intérieur d'un corps à plusieurs dimensions correspondant au carré et au cube. SHARP (392, 393) exprime, par des déterminants de cette espèce, le volume et les autres propriétés de la « figure régulière » à  $n$  dimensions qui est limitée par  $n + 1$  corps à  $n - 1$  dimensions ; et RAHNSEN (301) découvre au moyen de déterminants les propriétés de divers corps à  $n$  dimensions.

Aux *corps à plusieurs dimensions* se rattache d'ailleurs une littérature si abondante, que seule, celle de la Géométrie projective dans le  $R_n$ , peut lui être comparée. Toute une série de travaux s'occupe exclusivement des *corps réguliers*. RUDEL (318) étend sa méthode de détermination des deux premières séries de ces corps se continuant dans tous les espaces, à la troisième série, confirmant ainsi les résultats de STRINGHAM. SCHLEGEL (334, 338) obtient la représentation de ces trois séries de corps sur le plan. HEYL (156) fait des modèles de projection des corps réguliers à quatre dimensions, mais ne s'en tient pas à un principe unique ; aussi ne s'accordent-ils qu'en partie avec ceux construits autrefois par SCHLEGEL. HALL, SCHOUTE et BRUECKNER étudient les corps réguliers du  $R_4$  : HALL (148) construit des formes de corps de projections pour les trois plus simples, SCHOUTE (343, 364) étudie les sections et projections régulières des cinq plus compliquées, BRUECKNER (55) résume les propriétés des six corps en les reliant aux résultats de la géométrie élémentaire du  $R_4$ . Il faut encore citer GALDEANO (138) qui décrit des modèles de projection, SCHOUTE (341) qui réunit les propriétés élémentaires connues jusqu'à présent des corps cités plus haut, BIERMANN (97) qui, par intégration, détermine la surface et le volume de la sphère à  $n$  dimensions, et un *anonyme* (183). La

formation des *carrés magiques* est étendue par SCHLEGEL (337) et plus tard par ARNOUX (7, 211) au cube à  $n$  dimensions, et ces corps numériques sont représentés systématiquement dans le plan. La première série des corps réguliers, avec  $n+1$  sommets, est le sujet de nombreuses études. Leurs volumes sont déterminés par LORIA (234), LIERS (220), CLIFFORD (95) et CESARO (86) qui calcule aussi leurs médianes ainsi que leurs moments d'inertie, ceci comme application au calcul des probabilités ; HOPPE (175, 176) utilise leurs axes d'inertie principaux comme axes de coordonnées pour les sommets du corps, il calcule pour les corps à  $n$  dimensions ayant  $n+1$  et  $n+2$  sommets, l'expression  $\int z^n dV$ , déjà déterminée par ROUTH pour le triangle, le tétraèdre le quadrilatère et le pentagone. SYLVESTER et SHARP (394, 396, 398) enfin trouvent d'autres propriétés de ces corps.

*Les partages d'espace* se rattachent à la théorie des corps réguliers. Dans ce domaine, EBERHARD (111) étend au  $R_n$  des théorèmes de Steiner, Euler, Cauchy, Listing ; HESS (153, 154) et SCHLEGEL (336) utilisent les corps réguliers du  $R_4$  dans le but de déterminer, pour l'espace à trois dimensions, de courbure constante, des partages réguliers ; GOURSAT (143) passe réciproquement du partage d'espace aux projections à trois dimensions des corps réguliers du  $R_4$ . SCHOUTE (345) donne enfin trois systèmes de partage pour l'espace à  $n$  dimensions.

Les corps réguliers ont pris une plus grande importance par l'étude des *transformations* qui ramènent un corps de ce genre à lui-même. GOURSAT (146), le premier, étend ces recherches aux corps du  $R_4$ , en donnant à la théorie de ces corps, par la détermination des groupes de substitutions linéaires à quatre variables et d'ordre fini, les fondements analytiques qui la mettent dans le rapport le plus étroit avec la théorie de la transformation. Ensuite, VAN OSS (259) examine les groupes de mouvements de ces corps, MASCHKE (241) représente le groupe de rotation, par le diagramme des couleurs de Cayley ; BIERMANN (38), par une substitution linéaire d'une variable complexe fait revenir sur eux-mêmes les sommets des corps réguliers du  $R_5$ .

On étudie aussi les figures de plusieurs corps non réguliers du  $R_n$ . Il est procédé à des déterminations métriques pour le parallélépipède, par LIPSCHITZ (230), pour la pyramide du  $R_n$ , par LASKER

(214), pour le prismatoïde, par SCHOUTE (347), et, par SCHLEGEL (322) pour le prisme du  $R_4$  en commentant cette recherche par un modèle de projection. POINCARÉ (293) étend un théorème d'Euler sur le polyèdre, aux polyèdres à  $n$  dimensions ; SCHOUTE (348, 346) étudie des corps du  $R_n$  admettant  $n+2$  inversions et donne dans le  $R_4$  les formes cristallines les plus générales du système régulier.

NOMBREUSES sont aussi les extensions de la *Géométrie élémentaire* aux espaces supérieurs. CASSANI (69) entreprend ces développements systématiquement d'abord pour le  $R_4$ , dont la Géométrie est en même temps interprétée comme Géométrie réglée du  $R_6$ , puis pour le  $R_n$  Veronese (423) de même, avec une base philosophique très complète ; une critique de Péano a provoqué un intéressant échange d'opinions. DEL PEZZO (276) donne un tableau des postulats, définitions et théorèmes fondamentaux de la géométrie linéaire projective du  $R_n$ . CASSANI (72) traite la *métrique* du  $R_n$  ; SEGRE (386) détermine sans calcul, les *propriétés descriptives* du  $R_4$ , par analogie à celle des espaces inférieurs et donne la démonstration d'un théorème de KLEIN (378) relatif aux conditions sous lesquelles un espace à  $n$  dimensions est linéaire. SCHLEGEL (335) fixe les différentes formes des *groupes ponctuels* du  $R_n$ , TONELLI (417), PEDDIE (266), BERTINI (dans le dernier chapitre du 69, 25) trouvent des théorèmes sur les intersections d'espaces et sur les espaces ayant une partie commune de dimensions multiples et d'ordres divers. BUSCHE (61) étend au  $R_n$  les *relations harmoniques* ; KÜHNE (212) de même. Divers théorèmes sont donnés par HOPPE (178) et DE LA RIVE (311). HOPPE (173, 181), CASSANI (68, 73) et aussi CASTELNUOVO (74) s'occupent des *angles* des espaces linéaires ; JORDAN (186) les étudie analytiquement et VERONESE (419) au moyen de la Géométrie pure. HOPPE (179) et SCHOUTE (342), VERONESE (422), SCHLEGEL (331) traitent respectivement de la *congruence* et de la *symétrie* dans le  $R_n$ , des *configurations*, et des systèmes de *coordonnées polaires*.

Dans le domaine des *groupes de transformation*, les recherches utilisant le  $R_n$ , se sont montrées fécondes en résultats ; ce qui se rapporte aux corps réguliers a déjà été mentionné plus haut. Notons une étude analytique de COLE (91) sur les groupes

de transformations ramenant une sphère à quatre dimensions à elle-même. KANTOR (191-193) étudie les transformations *quadratiques* du  $R_n$ ; DEL PEZZO (278, 279) et FANO (128, 129) s'occupent des *transformations de Cremona*; FANO étudie (126, 127) les groupes de *transformations continus et projectifs* servant à déterminer certaines  $M_n$  algébriques et leurs relations entre elles; il généralise aussi (130) les groupes de *Jonquièrre*. J. BRILL (54) traite des *transformations ponctuelles* dans le  $R_n$  et ENGEL (114, 115) des *transformations infinitésimales*. Les groupes de *transformations* de LIE, en corrélation avec la théorie des formes spatiales ainsi que les groupes transformant un  $R_{n-1}$  d'un domaine limité, en un autre  $R_{n-1}$  du même domaine, sont étudiés par KILLING (201, 204). DEL REY (304) s'occupe des groupes de *transformations linéaires à involutions* du  $R_n$ ; PAGE (261, 262) étudie divers groupes du  $R_4$ , en particulier certains groupes primitifs. LANDSBERG (212) enfin, utilise les groupes du  $R_3$  pour définir comme élément d'espace, un groupe de  $m$  éléments, représenté par un système de  $m(n-m)$  équations, généralisant ainsi, dans un domaine à  $n$  variables, la notion connue de PLÜCKER.

De même que pour les corps réguliers du  $R_4$ , on cherche aussi, par des *projections*, *représentations* et applications du principe de *correspondance*, à faciliter l'intelligence de diverses configurations à plusieurs dimensions et à établir leurs propriétés. DEL PEZZO (271) traite d'une façon générale le problème de la *projection* d'une  $M_2$  et d'une  $M_p$  d'un espace sur un autre; DEL RE (305) cherche les projections successives des quadriques du  $R_n$ ; BERTINI (28) considère des courbes planes comme projections de courbes spéciales du  $R_n$ , et VIVANTI (425) montre que des formules récurrentes de certaines fonctions arithmétiques, formules que l'on trouve dans la théorie des types finis (endliche *Ordnungstypen*) établie par G. Cantor, ont leur vraie origine dans une projection de certaines configurations du  $R_n$  sur un espace inférieur. SEGRE (383) représente sur le plan une  $M_2^r$  du  $R_n$ , ASCHIERI (10) l'espace réglé sur le  $R_n$ , AUTONNE (14 et 15) les points d'un plan sur une  $M_2$  unicursale et située dans le  $R_n$ ; LORIA (237) rapporte les droites d'un  $R_3$  aux points d'un  $R_4$ . KÜHNE (210) donne pour le  $R_n$  des *représentations conformes* dans les espaces supérieurs, et PUCHTA (300) le fait pour un système de courbes orthogonales

sur une sphère à quatre et à  $n$  dimensions. PANNELLI (264) trouve une correspondance entre  $R_3$  et  $R_4$ , qui conduit à la représentation de KLEIN d'un complexe linéaire sur l'espace ponctuel, MILESI (245) prouve d'une nouvelle manière, qu'une corrélation entre le  $R_m$  et le  $R_n$ , ne peut être continue et univoque en même temps; CASTELNUOVO (77) généralise des théorèmes de CLEBSCH de Sturm et de Rosanes sur des groupes ponctuels associés; CESARO (90) donne des formules pour les *déformations* infiniment petites d'une surface du  $R_n$ ; PECHTA (299) étudie les déformations continues d'une  $M_n$ ; SCHUR (363, 364) celles des corps à courbure de Riemann constante et celles d'une  $M_3$  du  $R_4$ .

La *Géométrie projective*, dont les principes et raisonnements ont été, pour ainsi dire sans exception, généralisés de cette façon, est un domaine qui se prête spécialement aux recherches du  $R_n$ , et ces études sont presque toutes dues à un groupe de savants italiens; elles se rapportent aux *relations fondamentales* chez ASCHIERI (12) aux *postulats* chez FANO (123) et AMODEO (3, 4), au passage dans le  $R_4$  de théorèmes de la *Géométrie des droites* chez BERTINI (24) et SEGRE (366-368), à la *théorie des polaires* chez BRAMBILLA (51) et WAELSCH (432), à la *détermination de M supérieurs* au moyen de M résultant de projections chez ZINDLER (438), à des *relations collinéaires et d'involution* chez LORIA (232, 238), PREDELLA (295), DEL RE (304), à des *correspondances* chez BERZOLARI (31), de PAOLIS (265), GIUDICE (144), DEL RE (302, 303), PALATINI (263), AMODEO (1, 2), CHIZZONI (93), PIETI (281), BORDIGA (44), ASCHIERI (8), à des *homographies* chez ENRIQUES (116-118), SEGRE (369-372), BERTINI (23, 26, 27), PREDELLA (294), ASCHIERI (9, 11), DERUYTS (105), à des *corrélations* chez HURST (158) et FONTENÉ (134), — à des *complexes et congruences* chez BORDIGA (45, 48-50), SCHUMACHER (362), RICCI (309), CASTELNUOVO (75, 82), SEGRE (386, 387). Ce dernier détermine sans calcul, les propriétés descriptives du  $R_4$  et étend les premières propriétés focales des faisceaux et gerbes de droites du  $R_3$ , à ceux et celles du  $R_4$ .

On sait que des théorèmes de la Géométrie plane se démontrent souvent le plus facilement par des *sections* et *projections* de figures de l'espace; ce procédé appliqué aux espaces à plus de trois dimensions, conduit à de nouveaux résultats du domaine de

la Géométrie élémentaire. C'est ainsi que BORDIGA (40, 42, 46, 47), déduit du  $R_6$  des propriétés de surfaces des 5<sup>e</sup>, 6<sup>e</sup> et 7<sup>e</sup> ordres, et étend (43) ces considérations aux surfaces de degré  $\frac{1}{2} m (m+1)$  du  $R_{2m}$ ; il donne aussi une représentation plane des surfaces réglées normales situées dans le  $R_n$  (41). SEGRE (370) trouve dans le principe de la projection des figures du  $R_i$ , la base organique de la théorie des surfaces du quatrième ordre avec conique double ou conique de rebroussement. Il étend ensuite des théorèmes relatifs aux surfaces réglées de genre 1, 2, 3, aux surfaces d'un genre supérieur quelconque, (377, 380) et donne aussi la solution de diverses questions nouvelles relatives à la Géométrie ordinaire. On généralise une formule numérique de STURM sur les surfaces réglées d'ordre  $n$ , de genre  $p$  (384), et il en résulte le théorème de CLIFFORD sur la relation existant entre une courbe de genre  $p$  et d'ordre  $n > 2p - 2$  et un  $R < (n-p)$  (385). Finalement l'examen des  $M_3$  du  $R_i$  fournit de nouvelles surfaces et systèmes focaux du  $R_3$ , ainsi que des propriétés nouvelles de configurations connues (388). Les recherches de CASTELNUOVO (76) sur la géométrie des courbes elliptiques, se rattachent aux études de SEGRE (380). COSSEUR (98) utilise enfin le  $R_i$  pour étudier celles des surfaces algébriques qui contiennent plusieurs séries de coniques.

L'analogue d'une courbe du plan et d'une surface de l'espace est une *hypersurface* ( $M_{n-1}$  dans  $R_n$ ); ces figures sont l'objet de nombreuses recherches. SYLVESTER et SHARP (397) donnent des théorèmes sur leurs polaires; RICCI (307) généralise le problème des systèmes de surfaces orthogonaux; PUCHTA (298) étudie les surfaces développables les plus générales; MOORE (548) étend au  $R_n$  les études de PICARD sur les surfaces algébriques dont les sections planes sont toutes rationnelles. DEL PEZZO (270) applique aux hypersurfaces des théorèmes de VERONESE (419) sur les espaces tangents aux courbes du  $R_n$ ; et développant plus tard ces travaux il est conduit aux surfaces normales de  $p^{\text{ième}}$  espèce dans le  $R_n$ , aux hypersurfaces normales ( $M_{<2}$ ) (273) et à celles des surfaces du  $n^{\text{e}}$  ordre du  $R_n$  qui appartiennent à aucun  $R_{\leq n}$  (274). SEGRE (371, 374) entreprend la théorie des surfaces réglées. DEL PEZZO (268, 277), NICOLI (257), BERTINI (29), donnent des addi-

tions au travail de Segre (366), tandis que BERZOLARI (33) et NANSON (253) s'occupent spécialement des hypersurfaces du  $2^{\text{e}}$  ordre. ASCIONE (13) étend au  $R_4$  et SEGRE (390) au  $R_n$ , des théorèmes sur la hessienne. ENRIQUES (119) étudie les configurations à contacts d'ordre supérieurs des  $M_3^3$  dans  $R_4$ ; SEGRE (382) examine ceux des  $M_3^3$  du  $R_4$  qui admettent le plus grand nombre de points doubles. HOPPE (174, 182) applique au  $R_n$  des théorèmes de la *théorie de la courbure*; Ricci (308) généralise dans le même but les formules de la Géométrie infinitésimale, formules appliquées par BANAL (17) à celles des  $M_3$  du  $R_4$  pour lesquelles l'analogie avec les  $M_2$  du  $R_3$  n'existe pas. De la même façon CESARO (88, 89) développe les formules de CODAZZI, tandis que MONRO (247), MŁODZIEŃSKI (246), et STAECHEL (408) développent la théorie de la flexion des surfaces. DEL PEZZO (269) étend aux surfaces la représentation de Veronese d'une courbe du  $R_m$ , par la projection d'une courbe normale, dans le  $R_n$  (comparer avec 270); SCHOUTE (348) et HOPPE (176) étendent à des espaces supérieurs : le premier les recherches de Casey et Darboux sur certaines courbes planes et surfaces de l'espace ordinaire, le second le théorème de Biermann sur les plans tangents à une surface. HILBERT (157) étudie les singularités d'une surface discriminante du  $R_n$ ; VAHLEN (418) définit enfin, pour  $R_n$ , la surface de Fresnel.

La théorie des courbes donne lieu à des développements analogues dans le domaine des *hypercourbes* ( $M_{n-2}$  dans  $R_n$ ). HOPPE (177) fait le premier des recherches générales sur ces configurations; il étend à celles-ci les définitions de la tangente, de la normale principale, de la courbure et de la torsion (180). CESARO (87) développe dans le même but le principe du calcul barycentrique en définissant les coordonnées barycentriques d'un point comme masses des sommets d'un corps régulier ayant  $n + 1$  sommets, dans le  $R_n$ . Le même auteur donne plus tard une théorie des courbes des espaces supérieurs (91) et généralise en même temps les équations de l'élasticité. CASTELNUOVO (81) démontre par la Géométrie pure, au moyen du  $R_n$ , les théorèmes fondamentaux de la théorie des courbes algébriques, théorèmes démontrés par Clebsch au moyen des fonctions algébriques. PIRONDINI (291) étend aux courbes à triple courbure du  $R_4$  la Géométrie infinitésimale

ordinaire. CASSANI (71) et DE RUYTS (104) appliquent les théorèmes sur la cubique gauche aux courbes normales du  $n^{\text{ème}}$  ordre dans le  $R_n$ ; ASCHIERI (10) étudie les courbes normales rationnelles du  $R_4$ ; LORIA (235, 236) et BERZOLARI (30) font des recherches correspondantes pour le  $R_n$ , et ZECCA (435) s'occupe spécialement dans le  $R_n$ , des courbes du  $(m+1)^{\text{ème}}$  ordre avec points doubles. Les propriétés de certaines courbes sont aussi étendues aux hypercourbes. C'est ainsi que FANO (125) étudie la position de la courbe gauche d'un ordre donné et de genre maximum du  $R_n$ , BRUNN (58) les courbes sans points d'inflexion, LASKER (215) celles du  $R_n$  coupées par un  $R_{n-1}$  en  $n$  points; BERTINI considère les courbes planes comme projections de courbes spéciales du  $R_n$ . DEL PEZZO (275) et FINE (133) s'occupent des singularités des hypercourbes et LANDSBERG (213) des courbures de courbes à une dimension contenues dans les espaces supérieurs.

La *Géométrie énumérative* fondée par SCHUBERT ouvrit aux chercheurs un riche champ d'études; l'objet principal de cette géométrie considéré dans sa plus grande généralité, consiste à déterminer le nombre de configurations qui satisfont à un certain nombre de conditions. SCHUBERT lui-même a résolu dans toute une suite de mémoires (351-361) des problèmes de cette espèce et d'une complication toujours plus grande; il traita, entre autre, à tour de rôle: les nombres invariants d'espaces linéaires, le problème des caractéristiques et des déterminations de nombres pour la  $M$  quadratique et pour la géométrie réglée. Ces travaux se relient à ceux de PIÉRI (282, 284-288), qui donne des déterminations numériques sur les coïncidences de droites et les couples de points ainsi que sur les intersections d'espaces à plusieurs dimensions; SEGRE (391) traite à un autre point de vue ces problèmes, ce qui le conduit à de nouvelles généralisations. CASTELNUOVO (78-80, 83) applique la méthode de SCHUBERT dans le même sens que PIÉRI à des questions générales de la Géométrie énumérative, à des courbes algébriques et à des involutions rationnelles. En outre CASSANI (70) et AMODEO (5) s'occupent de déterminations de nombres de systèmes linéaires; VISALLI (424) traite des caractéristiques des systèmes de corrélation entre deux plans; PINCHERLE (290), BERZOLARI (32) et BURALI FORTI (60) étudient les hypersurfaces et les hypercourbes; le dernier

applique au  $R_n$  la méthode d'Halphen pour la théorie des caractéristiques du  $R_3$ .

Enfin STUDY (412) donne des compléments sur des nombres de coniques et réussit, par une représentation dans le  $R_3$  de l'ensemble des coniques planes, à éclaircir la différence existant entre les conceptions opposées de Halphen et de Chasles (415).

DYCK (110) fournit des généralisations de théorèmes de l'*Analysis situs* du  $M_n$  et POINCARÉ montre que, dans le sens de l'*Analysis situs*, une surface n'est déjà plus, dans le  $R_4$ , définie par les « indices de connexion » de BETTI.

La théorie des ensembles de points est étendue au  $R_n$ , d'abord par son fondateur CANTOR (67), puis par LORIA (233). MACCAFERI (239) fixe la condition d'un système ponctuel connectif à  $n$  dimensions et SCHÖNFLIES (340) utilise, pour la représentation de cubes à diverses dimensions, le théorème de Cantor : un ensemble à  $n$  dimensions possède la même puissance qu'un ensemble à une dimension.

Les formes d'espace non euclidiennes à  $n$  dimensions furent d'abord étudiées en détail par KILLING (199, 202, 203), au moyen d'une généralisation des coordonnées de Weierstrass ; on trouve aussi chez LIE (219<sub>a</sub>) quelques remarques à ce sujet. STOUFF (409) étend la formule de la surface du triangle sphérique à la surface sphérique de Riemann dans l'espace à  $n$  dimensions. SCHÜMBERGER (339) donne les traits fondamentaux de la géométrie sphérique linéaire à  $n$  dimensions ; HEYL (155) examine les propriétés de la sphère du  $R_n$  ; enfin BRILL (53) établit que certains espaces à courbure négative constante ne sont contenus dans aucun  $R_4$ , mais peuvent être tirés d'un  $R_5$ .

La Mécanique met aussi à profit cette extension de la géométrie. BUCHHEIM (59) réussit à développer, au moyen des méthodes de Grassmann, la théorie des forces agissant sur un corps solide, dans diverses formes d'espace, à plusieurs dimensions, la théorie des biquaternions étant ici en défaut. KILLING (200) établit pour des points assujettis à demeurer sur une sphère à  $n$  dimensions du  $R_{n+1}$ , les bases de la mécanique, des espaces non euclidiens ; COLE (97) étudie les rotations dans le  $R$  et CANIZZO (62) dans le  $R_5$ .

Le besoin de représenter des *fonctions analytiques* par des

figures géométriques, a aussi conduit à utiliser les espaces à plusieurs dimensions ; ainsi BETTAZZI (34) étudie les expressions analytiques qui représentent, en chaque point du  $M_n$ , une fonction à  $n$  variables réelles, finie et continue dans  $M_n$ . VOLTERRA (426-430) étend au  $R_n$ , la théorie de Riemann des variables complexes ; il étudie dans les hyperespaces les fonctions conjuguées et établit l'intégration complète d'un système d'équations différentielles partielles, à l'intérieur d'un espace sphérique. C'est dans ce même domaine que se classent les études de FABRI (121-122), sur les fonctions dans les hyperespaces.

Les mémoires sur des nombres complexes d'ordre supérieur se placent aussi dans la liste des recherches à  $n$  dimensions ; car ces quantités, quoique étant, au premier abord, d'une nature purement analytique, forment cependant, comme Grassmann le montre le premier, la base la plus simple des études de la géométrie à plusieurs dimensions. Mentionnons encore parmi les travaux récents, la démonstration de WEIERSTRASS (433), établissant la possibilité d'une arithmétique des nombres complexes avec un nombre quelconque d'unités principales, et la conception due à DEDEKIND (103), des grandeurs hypercomplexes comme nombres ordinaires plurivalents. A ce dernier travail, se rattachent les études analytiques de PETERSEN (267), BERLOTY (22) et WEYER (434), sur la théorie de ces nombres. Par contre la représentation géométrique en fut donnée par SCHUR (365) qui considère les composantes d'un nombre complexe à  $n$  membres, comme coordonnées d'un point du  $R_n$  ; il donne pour établir la liaison entre ces nombres l'interprétation géométrique et rattache leurs relations fonctionnelles à la théorie des transformations de Lie, étude continuée par STUDY (413-414) et SCHAEFFERS (320).

SCHENDEL (322) donne des applications des méthodes de Grassmann, à la géométrie à plusieurs dimensions ; enfin SIMONY (403) étudie les opérations fondamentales des nombres supérieurs complexes. L'étude de ces nombres et de leurs opérations a éclairci notablement la manière de les envisager et simplifié les calculs. On reconnut que des symboles incommodes et des calculs symboliques peuvent être remplacés de la façon la plus avantageuse par l'introduction de ces nombres et des opérations les concernant ; tous ces essais ont abouti enfin aux unités et opérations

de l'Ausdehnungslehre. Les tentatives d'extension de la théorie des quaternions à un plus grand nombre d'unités ont eu le même résultat ; l'exemple de Chapman qui, à cet effet, utilisa un nouveau symbole sans remarquer que celui-ci avait la même action que la « multiplication extérieure » de Grassmann, le montre du reste ; dernièrement encore SHAW (399), quoique travaillant dans un autre but, fit une erreur tout analogue.

Pour terminer rappelons encore la question suivante bien souvent discutée : Quelles sont, parmi les nombreuses formes d'espace *abstraites* des mathématiques celles qui possèdent leur image *concrète* dans notre univers, (domaine de l'expérience). Il est indiscutable aujourd'hui que notre univers n'est pas pourvu de plus de trois dimensions et que tous les essais tendant à lui en ajouter une quatrième sont à rejeter. Il existe par contre une question encore non résolue, celle de savoir si cet espace est sans courbure plan ; ou si, d'après une hypothèse émise par ZÖLLNER (439), il possède une courbure positive, fût elle même inappréciable. Rien ne fait présumer non plus que notre univers se trouve dans un espace à quatre dimensions *existant réellement* comme un plan dans un espace à trois dimensions. Il est vrai que BRESCH (52) a formulé une hypothèse analogue pour expliquer certains faits chimiques. D'après Most (249) aucun fait physique ne nécessite une telle hypothèse. SIMONY (402) y opposa des considérations sur la matière.

On connaît une série de phénomènes cinématiques qui sont impossibles dans un espace à trois dimensions et qui, par contre, sont exécutables dans l'espace à quatre dimensions. C'est ainsi que NEWCOMB (252) montra qu'au moyen d'un passage par l'espace à quatre dimensions, une surface matérielle fermée pouvait, par flexion, être transformée de telle façon que le côté intérieur devienne côté extérieur et vice versa, HOPPE (171-172) et DUREGE (109) qu'une certaine courbe gauche fermée et pourvue d'un lacet pouvait en être privée par un passage au travers de l'espace à quatre dimensions, passage durant lequel la courbe reste fermée.

Si on considère pour clore cet aperçu, tout le développement actuel de la Géométrie à  $n$  dimensions, développement qui est encore loin d'être terminé, on doit reconnaître que l'apparition de cette branche des mathématiques marque une ère nouvelle

dans l'histoire de la Géométrie ; de nouvelles voies sont ainsi ouvertes aux chercheurs dans des domaines inexplorés, et la Géométrie, même en restant dans son ancien domaine intuitif, est fructifiée et enrichie à bien des égards.

D<sup>r</sup> Victor SCHLEGEL (Hagen, Prusse).

### INDEX BIBLIOGRAPHIQUE (1)

AMODEO. — 1. Le corrispondenze univoche sulle curve ellittiche di ordine  $n$  normali di uno  $S_{n-1}$ . *Annali di mat.* (2), 19, 1891.

2. Corrispondenze univoche singolari delle curve ellittiche, armoniche ed equianarmoniche. *Annali di mat.* (2), 19, 1891.

3. Quali possono essere i postulati fondamentali della geometria proiettiva di uno  $S_r$ . *Torino Atti*, 26, 1891.

4. Sulla linearità delle varietà ad un numero qualunque di dimensioni. *Riv. di Mat.* 2, 1892.

5. Un' osservazione sulle condizioni lineari della geometria. *Annali del. R. Ist. Tecn. e Naut. di Napoli*, 1892.

ANDRADE. — 6. Sur un point de doctrine relatif à la théorie des intégrales multiples. *C. R.*, 119, 1894.

ARNOUX. — 7. Essais de psychologie et de métaphysique positives. Arithmétique graphique. Les espaces arithmétiques hypermagiques. Paris, 1894.

ASCHIERI. — 8. Sulla trasformazione omographica generale di uno spazio lineare di specie qualunque. *Lomb. Ist. Rend.* (2), 18, 1885.

9. Delle corrispondenze lineari reciproche in uno spazio lineare di specie qualunque. *Lomb. Rend.* (2), 19, 1886.

10. Sulla curva normale di uno spazio a quattro dimensioni. *Rom. Acc. L. Mem.* (4), 4, 1887.

11. Sulle omografie binarie e ternarie. — Sulle omografie binarie e i loro prodotti. *Lomb. Ist. Rend.* (2), 24, 1891.

12. Fondamenti di geometria analitica. *Modena Mem.* (2), 11, 1895.

ASCIONE. — 13. Sulla Hessiana di una varietà nello spazio a 4 dimensioni. *Batt. G.*, 31, 1893.

AUTONNE. — 14. Sur les variétés unicursales à deux dimensions. *C. R.*, 121, 1895.

15. Sur les variétés unicursales à trois dimensions *C. R.*, 121, 1895.

BALL. — 16. A hypothesis relating to the nature of the ether and gravity. *Mess.* (2), 21, 1891.

BANAL. — 17. Sulle varietà a tre dimensioni con una curvatura nulla e due eguali. *Annali di Mat.* (2), 24, 1896.

BECKER. — 18. Ueber die neuesten Untersuchungen in Betreff unserer Anschauungen vom Raume. *Schlömilch Z.*, 17, 1872.

(1) Les titres des journaux sont abrégés en accord avec le *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik*. Berlin.