

<b>Zeitschrift:</b>	L'Enseignement Mathématique
<b>Herausgeber:</b>	Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
<b>Band:</b>	2 (1900)
<b>Heft:</b>	1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE
 <b>Artikel:</b>	 SUR LE DÉVELOPPEMENT ET L'ÉTAT ACTUEL DE LA GÉOMÉTRIE A n DIMENSIONS
<b>Autor:</b>	Schlegel, Dr Victor
<b>Kapitel:</b>	I
<b>DOI:</b>	<a href="https://doi.org/10.5169/seals-3554">https://doi.org/10.5169/seals-3554</a>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 15.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# SUR LE DÉVELOPPEMENT ET L'ÉTAT ACTUEL DE LA GÉOMÉTRIE A $n$ DIMENSIONS<sup>(1)</sup>

---

Une nouvelle branche des sciences mathématiques, la Géométrie à  $n$  dimensions, s'est développée progressivement dans la seconde moitié du siècle. Dans le vaste domaine qu'elles se sont ouvert, ces recherches ont été fécondes en résultats importants et, de plus, la Géométrie limitée au champ déjà connu leur doit des points de vue nouveaux faisant apparaître en particulier les méthodes dans leur signification la plus claire.

Actuellement, il semble que l'enseignement doive commencer à tenir compte des développements que nous venons de signaler, et cela d'autant plus que l'étude des domaines avec plus de quatre dimensions a provoqué des améliorations et des extensions dans la représentation géométrique en général. En essayant de résumer pour cette revue les travaux considérables relatifs à ce sujet et en les référant à une nomenclature aussi complète que possible, nous espérons que notre tentative sera bien accueillie par les lecteurs que les questions nouvelles intéressent.

## I

On ne saurait dire que la notion d'espaces et de figures à dimensions multiples doive son origine aux recherches géométriques contemporaines. Elle existait depuis longtemps en germe :

---

<sup>(1)</sup> La première partie de ce mémoire a paru en 1886 dans le recueil allemand *Leopoldina* et l'auteur a rédigé la seconde partie, qui donne à ce travail son actualité, pour son insertion dans *l'Enseignement mathématique*. Il est accompagné d'un *Index bibliographique* dans l'ordre alphabétique des auteurs cités; c'est à cet Index que se réfèrent les numéros mis entre parenthèses dans le texte.

puisqu'on avait reconnu que le mouvement par lequel la droite résulte du point, le plan de la droite et l'espace du plan implique chaque fois l'existence d'une dimension de plus, on pouvait par la pensée continuer indéfiniment ce mode de génération, bien que *l'intuition* <sup>(1)</sup> des figures cessât d'être possible. Toutefois, le caractère empirique de la Géométrie fit d'abord condamner cette incursion au delà de l'intuitif comme inutile, contraire à l'expérience et même absurde. La notion dont il s'agit trouva dans la Géométrie analytique un puissant élément de progrès. La représentation des lignes et des surfaces par des équations à deux et trois variables conduit à la question : comment les équations à quatre variables doivent-elles être interprétées ? Dans d'autres domaines l'analyse forçait directement la Géométrie à sortir de l'intuitif : les racines imaginaires font admettre un champ qui n'est pas réel et la notion de l'infiniment grand implique des figures infiniment éloignées ; or, par l'emploi de ces innovations les restrictions de certaines propositions de Géométrie disparaissent.

Ce fut en essayant vainement de démontrer le postulatum d'Euclide que l'on franchit pour la première fois les limites de la Géométrie expérimentale. Déjà en 1792, GAUSS (140) concevait le principe d'une Géométrie dans laquelle le postulatum n'est pas valable, et BOLYAI en 1832 (39), LOBATSCHEWKY en 1840 (231) le développèrent avec une ampleur de déduction telle que ces deux savants sont les fondateurs d'une Géométrie transcendante <sup>(2)</sup> caractérisée en particulier par ce fait que la somme des angles du triangle < 2 droits. Mais il n'existait aucun domaine qui permit de contrôler par des résultats valables ce qui pouvait sembler des paradoxes et ces recherches restèrent ignorées. RIEMANN en 1854 (310) et HELMHOLTZ en 1868 (152) furent conduits, par des recherches analytiques sur la différentielle de l'élément linéaire, à imaginer des espaces satisfaisant à certaines formules générales dont l'espace euclidien est un cas particulier. Ceci constituait un double progrès : d'une part, aux deux possibilités de la Géométrie

<sup>(1)</sup> Par *intuitif* l'auteur entend susceptible d'être vu intuitivement ou immédiatement.

<sup>(2)</sup> Cette géométrie est appelée par Gauss *non euclidienne*, par Bolyai *absolue*, par Klein *hyperbolique*.

euclidienne et de celle de Lobatschewsky venait s'en ajouter une troisième, à savoir que la somme des angles du triangle  $> 2$  droits; de l'autre, les résultats nouveaux s'appliquaient aux espaces à dimensions multiples. L'introduction de la notion de courbure permettait de caractériser avec précision le domaine de la Géométrie non euclidienne. BELTRAMI en 1868 (20) avait montré que la surface à courbure négative constante réalisait les résultats de Lobatschewsky; on put constater que la troisième possibilité avait pour champ d'interprétation la surface sphérique à courbure positive constante. Ainsi se formèrent les conceptions des formes d'espace de Lobatschewsky à courbure constante négative et de Riemann (positive) pour un nombre quelconque de dimensions.

C'est d'un tout autre point de départ que procédèrent les travaux de GRASSMANN que je ne fais que mentionner ici, leur objet essentiel étant le *calcul géométrique*. Par une conception d'importance fondamentale, il crée, sans rien emprunter à la Géométrie analytique, une analyse parfaitement adéquate à la recherche géométrique, réalisant l'idéal entrevu par LEIBNIZ (216). Cette méthode capable d'extension dans le domaine des dimensions multiples fut exposée dans toute sa généralité dans l'AUSDEHNUNGSLEHRE en 1844 (146). Cet ouvrage contient tous les principes d'une Géométrie à  $n$  dimensions, et il faut en signaler la portée en ce sens que la Géométrie réelle apparaît comme l'application de la science abstraite de l'extension à l'espace représentable. Les principes établis par GRASSMANN (146) ont été énoncés plus tard par ERDMANN (120) sous une forme nouvelle.

Toute une série de travaux se rattachent à ceux de Riemann et de Helmholtz et sont essentiellement analytiques. Il s'agit de fonctions de  $n$  variables, de problèmes de transformations, d'expressions pour la mesure de la courbure, et les résultats géométriques sont plutôt des interprétations des résultats analytiques que le but qu'on se propose. La généralisation d'une formule à deux ou trois variables est indiquée comme s'appliquant aux  $M_n$  (1). Dans cette catégorie se rangent les travaux de KRONECKER (209),

(1) Dans ce qui suit on emploie les abréviations suivantes :  $R^n$  signifie espace linéaire (droite, plan, etc.) à  $n$  dimensions;  $M_r^p$  espace courbé (courbe, surface, etc.) à  $r$  dimensions et d'ordre  $p$ ;  $G_n$ , Géométrie à  $n$  dimensions.

BEEZ (19), LIPSCHITZ (221-228), CHRISTOFFEL (94), etc. Les géomètres spécialistes se tenaient sur la réserve à l'égard de ces incursions dans le transcendental, bien justifiés en pensant qu'il y avait encore beaucoup à trouver dans l'espace euclidien et dans le plan ; mais les expressions propres à la  $G_n$  se naturalisaient dans le langage mathématique et la nécessité de relier aux autres connaissances ce nouveau domaine s'imposait de plus en plus. Bien que la Géométrie du plan et de l'espace eût été libérée des liens de l'analyse par Steiner dont la force d'imagination donnait à ses recherches une valeur indépendante de sa méthode, et que Grassmann eût depuis longtemps trouvé un mode de calcul propre à la Géométrie abstraite, c'est encore aux méthodes usuelles de la Géométrie analytique qu'ont recours la plupart des savants dont il faut rappeler les noms. BETTI (35) s'est occupé des principes généraux d'une Géométrie analytique à  $n$  dimensions et a traité entre autres des rapports linéaires, de la limitation et du fractionnement des  $M_n$ . LIE (217, 218) a étudié les figures correspondant aux lignes et aux surfaces, l'intersection orthogonale, la sphère à  $n$  dimensions et a donné une extension du théorème de Dupin. JORDAN (186-188) a établi les conditions des directions parallèles et perpendiculaires de champs plans, a étudié leurs invariants-simultanés et a étendu le principe de la substitution orthogonale et ceux de la théorie des courbes relatifs à la courbure ; de plus on lui doit des recherches trigonométriques et cinématiques. Une partie de ces résultats, ce qui concerne le principe d'Euler sur la rotation autour d'un point fixe, avaient été aussi obtenus par SCHLAEFLI (327). FRAHM (136) a considéré ce même problème de Mécanique dans un  $R_{n+1}$ . G. CANTOR (63, 64) a montré comment le nombre des variables dont dépend la position d'un élément dans le  $R_n$  se réduit lorsque cet espace cesse d'être continu et a étudié les relations de deux points dans des champs de cette nature. NETTO (254) a démontré que la relation réciproque entre deux champs à  $m$  et à  $n$  dimensions ne peut pas être en même temps continue et univoque. S. KANTOR (189) a étudié les transformations linéaires dans le  $R_n$  dont EICHLER (112) s'était déjà occupé. PILGRIM (289) a déterminé le nombre de parties dans lesquelles un  $R_k$  est partagé par  $n$   $R_{n-1}$ . BRUNEL (56) a étudié les propriétés métriques des cour-

bes dans le  $R_n$  et KRETKOWSKY (208) a donné les coordonnées d'un point équidistant de  $n + 1$  points dans un  $R_n$ . Enfin GENOCCHI (142) a attiré l'attention sur le fait que celles des recherches de CAUCHY (84) qui peuvent être rattachées à la  $G_n$  sont antérieures à 1847.

Les travaux déjà mentionnés de Beez et Lipschitz font partie d'une autre catégorie concernant les multiplicités avec courbure, comprenant aussi les recherches d'OIDIO (260) sur les rapports des métriques, de KILLING (194) sur diverses formes d'espaces, de SCHERRING (324) sur les figures dans ces champs, et sur la pesanteur et autres forces, de BELTRAMI (21) sur les lignes géodésiques, de GEISER (141) sur une question de maximum, énumération qui n'a pas la prétention d'être absolument complète.

Entre temps il faut signaler des tentatives pour transporter dans un domaine représentable les résultats de la  $G_n$ . En 1870, CAYLEY (85) considéra les coefficients de l'équation d'une courbe assujettie à certaines conditions comme les coordonnées d'un point dans une multiplicité. SPOTTISWOOD (404, 405) attaqua directement le problème en partageant en groupes de trois éléments les variables d'une équation, le dernier groupe pouvant renfermer deux ou une variable. Si l'on considère alors les éléments d'un groupe comme des variables et les autres comme des paramètres, l'équation constitue pour chaque groupe un système de surfaces et tous ces systèmes dans leur ensemble donnent l'image géométrique de l'équation. HALPHEN (149) projeta une  $M_{(n-1)}$  sur  $(n-2) R_3$  et VERONESE (419-421) appliqua d'une manière systématique le principe de la projection et de l'intersection à l'étude des relations projectives. CRAIG (99) représenta une surface, donnée par deux équations à quatre variables dans  $R_4$ , par une surface dans  $R_3$  satisfaisant à la condition de similitude des éléments infinitésimaux. Il faut rappeler des essais de représentation d'une  $M_4$  dans  $R_3$  fondés dans la plupart des cas sur la substitution d'un élément représentable, la densité par SCHEFFLER (321), la coloration par MOST (249) à la quatrième dimension. Les considérations par lesquelles DUHRING (107) assimila la Mécanique de Lagrange à une  $G_4$  rentrent dans cet ordre de travaux ; la plus ancienne des tentatives de ce genre est sans doute celle du spiritiste anglais Henry More au XVII<sup>e</sup> siècle qui, du reste,

comme l'a montré ZIMMERMANN (436), ne cherchait pas dans une quatrième dimension un élément analogue aux trois dimensions. Ces essais ne semblent pas avoir amélioré la représentation des figures et de plus il est fâcheux d'introduire un élément étranger à la recherche mathématique pure. Dans cette question il ne reste d'autre parti à prendre que de sacrifier les dimensions d'ordre élevé et de ne représenter les figures que par leurs projections d'après les méthodes usuelles, et ce procédé n'est réalisable que s'il s'agit de passer d'un champ au champ immédiatement inférieur.

La méthode projective donne lieu au procédé probablement le meilleur pour obtenir la compréhension des  $M_n$ . En se guidant sur le passage du plan à l'espace, on peut passer de  $R_3$  à  $R_4$  et aller au delà en renonçant à toute représentation. Cette manière de procéder s'est montrée féconde ; elle a conduit à la conception du corps à quatre dimensions limité par des corps à trois dimensions. Aux plus anciens travaux de ce genre appartiennent ceux de RUEDEL (314-316) sur les rapports des points, droites, plans et espaces dans  $R_4$ , sur les plans qui se croisent et sur la congruence et la symétrie. On doit à HOPPE (159-169) une série importante de recherches dans lesquelles, partant d'une extension plane d'un grand nombre de conceptions spatiales, il a découvert une foule de propriétés des  $M_n$  et donné un ensemble de résultats intéressants sur la métrique de  $R_n$ . La considération de la figure limitée a conduit plusieurs des auteurs cités auxquels il faut joindre DURÈGE (108) à l'extension du principe d'Euler sur les polyèdres aux  $M_n$ . G. CANTOR (65-66) a étendu à  $R_n$  ses recherches sur les multiplicités de points. KANTOR (190) s'est occupé, ainsi que SCHUBERT (349, 350) des configurations dans  $R^n$ , tandis que STUDY (411), par la méthode des déterminants, a donné un grand nombre de propositions sur les angles, les pyramides et les puissances par rapport à un cercle. Un ouvrage de МЕИМКЕ (242) traite les mêmes sujets et par l'application de la méthode de Grassmann donne l'extension des propriétés des points singuliers du triangle. Cette même méthode a servi à SCHLEGEL<sup>(1)</sup> (328) pour étendre les propriétés des points harmoniques, des média-

<sup>(1)</sup> L'auteur du présent mémoire.

nes et du centre de figure du triangle aux figures analogues dans  $R_n$ .

Les nouvelles notions représentatives ont aussi trouvé leur application dans la Géométrie projective. Déjà en 1872, dans ses recherches sur les équations différentielles partielles, DARBOUX (101) était arrivé à déterminer les transformations de contact dans  $R_n$ . Des recherches ultérieures (102) l'on fait renoncer à l'emploi de projections tirées de  $R_4$ , à cause de son défaut d'utilité pratique. En connexion avec les travaux de Lie, KLEIN (205, 206) a établi la liaison entre la Géométrie réglée et la Géométrie métrique de  $R_4$  avec extension à  $R_n$ . SÈGRE (366, 367, 370) a donné un exposé détaillé des propriétés des surfaces du quatrième ordre à double section conique, en les considérant comme projection centrale, de la section de deux figures quadratiques à trois dimensions dans  $R_4$ , sur  $R_3$ . Dans l'ouvrage de MEYER (423, 424) sur l'apolarité et sur les courbes rationnelles, des extensions d'une grande généralité sont obtenues au moyen des ressources de l'Algèbre moderne.

Il faut parler ici d'un problème d'un intérêt spécial consistant à déterminer les figures régulières de l'espace plan à quatre dimensions qui correspondent aux polygones et aux polyèdres réguliers. Vu l'irrégularité présentée par le fait qu'il existe une infinité des premiers et seulement cinq des seconds, l'attention est attirée sur ce qui a lieu dans  $R_4$ . Rappelons seulement que la figure ne doit être limitée que par des polyèdres réguliers et que à chaque sommet et sur chaque arête le même nombre de ces solides se joignent. Citant pour mémoire un essai insuffisant de EMSMANN (113) pour trouver les figures correspondant au triangle et au tétraèdre, il faut mentionner HOPPE (159) qui a défini cette figure et déterminé son volume ainsi que ses analogues dans les champs plus élevés. A cette série SCHEFFLER (321) a joint celle qui commence par le carré et le cube, et montré qu'en laissant de côté la condition d'égalité des arêtes, la solution dans  $R_n$  est celle des racines d'une équation du  $n^{\text{ième}}$  degré. RUDEL (317), qui trouva ces mêmes séries, donna onze procédés pour construire les figures régulières de  $R_4$ ; mais les deux seuls utilisables conduisent aux deux séries ci-dessus et c'est en construisant leurs projections sur  $R_3$  qu'on parvient aux autres figures. Ces projections

sont des figures composées d'un certain nombre de polyèdres. On peut les obtenir de deux manières : soit en procédant du dedans vers le dehors par une formation progressive, soit du dehors vers le dedans par une décomposition. STRINGHAM (406) et HOPPE (170) ont obtenu la solution complète du problème, en employant l'un ou l'autre des procédés. SCHLEGEL (329) a employé le second procédé également avec succès. Il résulte de ces recherches que l'on connaît dans  $R_4$  six figures régulières respectivement limitées par 5, 16, et 600 tétraèdres, 8 hexaèdres, 24 octaèdres et 120 dodécaèdres<sup>(1)</sup>. De plus, Stringham a établi que les trois séries commençant respectivement : 1) par le triangle, le tétraèdre, le pentaédroïde (limité par cinq tétraèdres) ; 2) par le carré, l'hexaèdre, l'octaédroïde (limité par huit hexaèdres) ; 3) par le carré, l'octaèdre, l'hexadécaédroïde (limité par 16 tétraèdres) continuent dans toutes les multiplicités et que dans tout  $R_n$  supérieur à  $R_4$  il n'existe pas d'autre figure régulière. Qu'il me soit permis d'ajouter qu'en renonçant à la régularité des figures limites j'arrive à une plus grande généralité pour les figures elles-mêmes et que j'obtiens nombre de résultats relatifs à la courbure et à la théorie métrique. FORCHHAMMER (135) est également parvenu aux solutions mentionnées ; PUCHTA (296, 297), a traité la question par l'Analyse. SCHAPIRA (319) a remarqué que les nombres figurés qui se présentent dans la multiplication abélienne de séries infinies trouvent leur signification dans les figures régulières de multiplicité élevée.

Des recherches de ce genre ont de l'importance en raison des nouveaux aperçus qu'elles ouvrent sur la Géométrie du plan et de l'espace, sur le Calcul différentiel et la Mécanique. C'est ainsi que LIE (219) en a tiré une nouvelle méthode d'intégration. La dépendance des propositions analogues dans le plan et l'espace est élucidée par l'extension à  $G^n$ . Il arrive aussi qu'on obtient des résultats nouveaux en spécialisant les propositions relatives à  $R_n$ . Le théorème de HALPHEN (149) sur le nombre de points doubles dans une courbe du  $m^{i\text{ème}}$  ordre en est un exemple.

---

(1) Des modèles des solides de projection sont fournis par la librairie Martin Schilling, à Halle.