Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 2 (1900)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LES FONCTIONS HYPERBOLIQUES DANS L'ENSEIGNEMENT MOYEN

Autor: Barbarin, P.

Kapitel: IV. — Résolution de l'équation $x^3 + px + q = 0$.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-3582

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 09.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

IV. — Résolution de l'équation $x^3 + px + q = 0$.

Quand l'équation n'a qu'une seule racine réelle, la formule de Cardan qui la fait connaître par une somme de deux radicaux cubiques, est très désavantageuse dans la pratique ; or, si l'emploi des fonctions circulaires est tout indiqué quand les trois racines sont réelles, nous allons voir que celui des fonctions hyperboliques est aussi absolument naturel dans le cas contraire. Qu'on nous permette d'entrer à cet égard dans quelques détails ; nous résoudrons d'abord la question que voici : *Étant donné sh a ou ch a, calculer sh* $\frac{a}{3}$ *ou ch* $\frac{a}{3}$. Les formules de multiplication sont

$$\operatorname{sh} 3x = 3 \operatorname{sh} x + 4 \operatorname{sh}^3 x$$
$$\operatorname{ch} 3x = 4 \operatorname{ch}^3 x - 3 \operatorname{ch} x$$

donc, étant donné sh$a$, sh $\frac{a}{3} = z$ est racine de l'équation

$$(1) \qquad z^3 + \frac{3}{4} z - \frac{\operatorname{sh} a}{4} = 0$$

qui a pour résolvante

$$(1') \qquad U^2 - \frac{\operatorname{sh} a}{4} U - \frac{1}{64} = 0 .$$

On tire de cette dernière

$$U_1 = \frac{1}{8} e^{a}, \quad U_2 = -\frac{1}{8} e^{-a}$$

dans les trois racines de (1) sont

$$z_1 = \operatorname{sh} \frac{a}{3}$$
$$z_2 = -\frac{1}{2}\left[\operatorname{sh} \frac{a}{3} + i\sqrt{3} \operatorname{ch} \frac{a}{3}\right]$$
$$z_3 = -\frac{1}{2}\left[\operatorname{sh} \frac{a}{3} - i\sqrt{3} \operatorname{ch} \frac{a}{3}\right]$$

De même, ch$a$ étant donné, les trois racines de l'équation

$$(2) \qquad z^3 - \frac{3}{4} z - \frac{\operatorname{ch} a}{4} = 0$$

sont

$$z_1 = \operatorname{ch}\frac{a}{3}$$

$$z_2 = -\frac{1}{2}\left[\operatorname{ch}\frac{a}{3} + i\sqrt{3}\operatorname{sh}\frac{a}{3}\right]$$

$$z_3 = -\frac{1}{2}\left[\operatorname{ch}\frac{a}{3} - i\sqrt{3}\operatorname{sh}\frac{a}{3}\right]$$

Ceci posé, dans l'équation du troisième degré générale, admettons que $4p^3 + 27q^2$ soit positif ; deux cas se présentent suivant le signe de p.

1° p positif. En déterminant un coefficient λ et un argument hyperbolique a par les relations

$$\lambda = 2\sqrt{\frac{p}{3}}, \quad \operatorname{sh} a = -\frac{3q}{p\lambda},$$

si on fait $x = \lambda z$, on est ramené à l'équation (1) ; donc les trois racines demandées sont

$$x_1 = \lambda \operatorname{sh}\frac{a}{3}$$

$$x_2 = -\frac{\lambda}{2}\left[\operatorname{sh}\frac{a}{3} + i\sqrt{3}\operatorname{ch}\frac{a}{3}\right]$$

$$x_3 = -\frac{\lambda}{2}\left[\operatorname{sh}\frac{a}{3} - i\sqrt{3}\operatorname{ch}\frac{a}{3}\right]$$

2° p négatif. Cette fois on fait

$$\lambda = \pm 2\sqrt{-\frac{p}{3}}, \qquad \operatorname{ch} a = \frac{3q}{p\lambda},$$

en choisissant pour λ le signe contraire à celui de q, en sorte que $\operatorname{ch} a$ soit positif ; par $x = \lambda z$, on est ramené à l'équation (2), et les racines en x sont

$$x_1 = \lambda \operatorname{ch}\frac{a}{3}$$

$$x_2 = -\frac{\lambda}{2}\left[\operatorname{ch}\frac{a}{3} + i\sqrt{3}\operatorname{sh}\frac{a}{3}\right]$$

$$x_3 = -\frac{\lambda}{2}\left[\operatorname{ch}\frac{a}{3} - i\sqrt{3}\operatorname{sh}\frac{a}{3}\right]$$

Pour appliquer la méthode à un calcul numérique, il suffit

d'avoir à sa disposition une table de logarithmes des fonctions hyperboliques suffisamment étendue, et d'un maniement commode ; le calcul ci-dessous est fait à l'aide d'une table à 5 décimales, de disposition très pratique, mais qui n'est point encore publiée.

Résoudre l'équation $x^3 + 7x + 7 = 0$.

$$\lambda = 2\sqrt{\frac{7}{3}}, \log\lambda = 0{,}48502$$

$$\operatorname{sh} a = -\frac{3}{\lambda}, \log(-\operatorname{sh} a) = \underline{1}{,}99210, \quad a = -0{,}86857$$

$$\frac{a}{3} = -0{,}28952, \quad \log\operatorname{sh}\left(-\frac{a}{3}\right) = \bar{1}{,}46772, \quad \log\operatorname{ch}\left(-\frac{a}{3}\right) = 0{,}01796$$

$$\log(-x_1) = \bar{1}{,}95274$$

$$\log\frac{x_3 - x_2}{i} = \log\lambda + \log\sqrt{3} + \log\operatorname{ch}\left(\frac{-a}{3}\right) = 0{,}74153$$

$$-x_1 = 0{,}8969$$

$$x_2 + x_3 = 0{,}8969$$

$$\frac{x_3 - x_2}{i} = 5{,}5148$$

$$x_1 = -0{,}8969$$

$$x_2 = 0{,}44845 - 2{,}7574\,i$$

$$x_3 = 0{,}44845 + 2{,}7574\,i.$$

P. Barbarin (Bordeaux).

DÉMONSTRATION SIMPLIFIÉE

DE LA FORMULE DE TAYLOR

1. Parmi les différentes démonstrations de cette formule qui s'appuient sur le théorème de Rolle, la suivante est peut-être la plus facile, puisqu'elle n'exige que des différentiations extrêmement simples. Elle n'est pas, à ce que nous croyons, connue jusqu'à présent.