Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 2 (1900)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LES FONCTIONS HYPERBOLIQUES DANS L'ENSEIGNEMENT MOYEN

Autor: Barbarin, P.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-3582

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 09.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

LES FONCTIONS HYPERBOLIQUES

DANS L'ENSEIGNEMENT MOYEN

Comme appendice à la leçon sur les propriétés de la fonction e^x, bien des professeurs proposent en exercice à leurs élèves de démontrer les principales formules relatives aux transcendantes

$$\mathrm{sh}x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \mathrm{ch}x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \mathrm{th}x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

appelées communément *sinus*, *cosinus*, et *tangente hyperboliques* de l'argument réel x; ils signalent les analogies et différences que ces fonctions présentent avec les fonctions circulaires du même nom, et expliquent leur qualificatif d'hyperboliques en remarquant que $X = \mathrm{ch}\, x$, $Y = \mathrm{sh}\, x$ sont les coordonnées d'un point de l'hyperbole équilatère

$$X^2 - Y^2 = 1.$$

Mais là se bornent la plupart du temps les indications qu'ils donnent, et dans aucune partie du cours, les élèves ne sont appelés à en tirer profit. Nous croyons que c'est là une regrettable lacune, et nous sommes persuadé que si les étudiants de nos cours de mathématiques spéciales et de facultés étaient familiarisés avec le maniement des sinus et cosinus hyperboliques comme ils le sont avec celui des sinus et cosinus circulaires, ils sauraient apporter à bien des calculs de notables simplifications ; il est aisé de le prouver par des exemples simples empruntés à des questions élémentaires.

I. — Théorie de l'hyperbole

On peut écrire ainsi les coordonnées d'un point M de l'hyperbole :

$$x = a\,\mathrm{ch}\,\varphi, \quad y = b\,\mathrm{ch}\,\varphi.$$

et les propriétés de la courbe donnent lieu à des développements identiques à ceux qui servent pour l'ellipse ;

$$x' = a \operatorname{sh} \varphi, \quad y' = b \operatorname{ch} \varphi$$

représentent l'extrémité M′ du rayon oM′ conjugué à oM.

II. — Calcul d'une dérivée

Soit la fonction $y = \mathrm{L}\,(x + \sqrt{1 + x^2})$. En posant $x = \operatorname{sh}\varphi$, on a immédiatement

$$x + \sqrt{1 + x^2} = \operatorname{sh}\varphi + \operatorname{ch}\varphi = e^{\varphi}$$

donc $y = \varphi$, ou $x = \operatorname{sh} y$; par suite

$$y' = \frac{1}{\operatorname{ch} y} = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$$

III. — Résolution de l'équation $ax^2 + bx + c = o$.

Quand les racines sont réelles et de même signe, on définit un argument circulaire φ par l'égalité

$$\frac{4ac}{b^2} = \sin^2 \varphi$$

et les formules

$$x' = -\frac{b}{a} \cos^2 \frac{\varphi}{2}, \quad x'' = -\frac{b}{a} \sin^2 \frac{\varphi}{2}$$

font connaître les deux racines ; on peut suivre une marche en tout semblable si le produit ac est négatif, à condition de définir cette fois un argument hyperbolique φ par l'égalité

$$-\frac{4ac}{b^2} = \operatorname{sh}^2 \varphi$$

les racines, réelles et de signes contraires, sont

$$x' = -\frac{b}{a} \operatorname{ch}^2 \frac{\varphi}{2}, \quad x'' = \frac{b}{a} \operatorname{sh}^2 \frac{\varphi}{2}.$$

IV. — Résolution de l'équation $x^3 + px + q = 0$.

Quand l'équation n'a qu'une seule racine réelle, la formule de Cardan qui la fait connaître par une somme de deux radicaux cubiques, est très désavantageuse dans la pratique ; or, si l'emploi des fonctions circulaires est tout indiqué quand les trois racines sont réelles, nous allons voir que celui des fonctions hyperboliques est aussi absolument naturel dans le cas contraire. Qu'on nous permette d'entrer à cet égard dans quelques détails ; nous résoudrons d'abord la question que voici : *Étant donné sh a ou ch a, calculer sh* $\frac{a}{3}$ *ou ch* $\frac{a}{3}$. Les formules de multiplication sont

$$\operatorname{sh} 3x = 3 \operatorname{sh} x + 4 \operatorname{sh}^3 x$$
$$\operatorname{ch} 3x = 4 \operatorname{ch}^3 x - 3 \operatorname{ch} x$$

donc, étant donné sh$a$, sh $\frac{a}{3} = z$ est racine de l'équation

$$(1) \qquad z^3 + \frac{3}{4} z - \frac{\operatorname{sh} a}{4} = 0$$

qui a pour résolvante

$$(1') \qquad U^2 - \frac{\operatorname{sh} a}{4} U - \frac{1}{64} = 0 .$$

On tire de cette dernière

$$U_1 = \frac{1}{8} e^{a}, \quad U_2 = -\frac{1}{8} e^{-a}$$

dans les trois racines de (1) sont

$$z_1 = \operatorname{sh} \frac{a}{3}$$
$$z_2 = -\frac{1}{2}\left[\operatorname{sh} \frac{a}{3} + i\sqrt{3} \operatorname{ch} \frac{a}{3}\right]$$
$$z_3 = -\frac{1}{2}\left[\operatorname{sh} \frac{a}{3} - i\sqrt{3} \operatorname{ch} \frac{a}{3}\right]$$

De même, ch$a$ étant donné, les trois racines de l'équation

$$(2) \qquad z^3 - \frac{3}{4} z - \frac{\operatorname{ch} a}{4} = 0$$

sont

$$z_1 = \operatorname{ch}\frac{a}{3}$$

$$z_2 = -\frac{1}{2}\left[\operatorname{ch}\frac{a}{3} + i\sqrt{3}\operatorname{sh}\frac{a}{3}\right]$$

$$z_3 = -\frac{1}{2}\left[\operatorname{ch}\frac{a}{3} - i\sqrt{3}\operatorname{sh}\frac{a}{3}\right]$$

Ceci posé, dans l'équation du troisième degré générale, admettons que $4p^3 + 27q^2$ soit positif ; deux cas se présentent suivant le signe de p.

1° p positif. En déterminant un coefficient λ et un argument hyperbolique a par les relations

$$\lambda = 2\sqrt{\frac{p}{3}}, \quad \operatorname{sh} a = -\frac{3q}{p\lambda},$$

si on fait $x = \lambda z$, on est ramené à l'équation (1) ; donc les trois racines demandées sont

$$x_1 = \lambda \operatorname{sh}\frac{a}{3}$$

$$x_2 = -\frac{\lambda}{2}\left[\operatorname{sh}\frac{a}{3} + i\sqrt{3}\operatorname{ch}\frac{a}{3}\right]$$

$$x_3 = -\frac{\lambda}{2}\left[\operatorname{sh}\frac{a}{3} - i\sqrt{3}\operatorname{ch}\frac{a}{3}\right]$$

2° p négatif. Cette fois on fait

$$\lambda = \pm 2\sqrt{-\frac{p}{3}}, \qquad \operatorname{ch} a = \frac{3q}{p\lambda},$$

en choisissant pour λ le signe contraire à celui de q, en sorte que $\operatorname{ch} a$ soit positif ; par $x = \lambda z$, on est ramené à l'équation (2), et les racines en x sont

$$x_1 = \lambda \operatorname{ch}\frac{a}{3}$$

$$x_2 = -\frac{\lambda}{2}\left[\operatorname{ch}\frac{a}{3} + i\sqrt{3}\operatorname{sh}\frac{a}{3}\right]$$

$$x_3 = -\frac{\lambda}{2}\left[\operatorname{ch}\frac{a}{3} - i\sqrt{3}\operatorname{sh}\frac{a}{3}\right]$$

Pour appliquer la méthode à un calcul numérique, il suffit

d'avoir à sa disposition une table de logarithmes des fonctions hyperboliques suffisamment étendue, et d'un maniement commode ; le calcul ci-dessous est fait à l'aide d'une table à 5 décimales, de disposition très pratique, mais qui n'est point encore publiée.

Résoudre l'équation $x^3 + 7x + 7 = 0$.

$$\lambda = 2\sqrt{\frac{7}{3}}, \log\lambda = 0{,}48502$$

$$\operatorname{sh} a = -\frac{3}{\lambda}, \log(-\operatorname{sh} a) = \underline{1}{,}99210, \quad a = -0{,}86857$$

$$\frac{a}{3} = -0{,}28952, \quad \log\operatorname{sh}\left(-\frac{a}{3}\right) = \bar{1}{,}46772, \quad \log\operatorname{ch}\left(-\frac{a}{3}\right) = 0{,}01796$$

$$\log(-x_1) = \bar{1}{,}95274$$

$$\log\frac{x_3 - x_2}{i} = \log\lambda + \log\sqrt{3} + \log\operatorname{ch}\left(\frac{-a}{3}\right) = 0{,}74153$$

$$-x_1 = 0{,}8969$$

$$x_2 + x_3 = 0{,}8969$$

$$\frac{x_3 - x_2}{i} = 5{,}5148$$

$$x_1 = -0{,}8969$$

$$x_2 = 0{,}44845 - 2{,}7574\,i$$

$$x_3 = 0{,}44845 + 2{,}7574\,i.$$

P. Barbarin (Bordeaux).

DÉMONSTRATION SIMPLIFIÉE

DE LA FORMULE DE TAYLOR

1. Parmi les différentes démonstrations de cette formule qui s'appuient sur le théorème de Rolle, la suivante est peut-être la plus facile, puisqu'elle n'exige que des différentiations extrêmement simples. Elle n'est pas, à ce que nous croyons, connue jusqu'à présent.