Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 2 (1900)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LES MATHÉMATIQUES AU CONGRÈS DE PHILOSOPHIE
Autor: Couturat, Louis
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-3579

LES MATHÉMATIQUES

AU CONGRÈS DE PHILOSOPHIE

On sait que le premier *Congrès international de Philosophie*, organisé par la *Revue de Métaphysique et de Morale*, s'est tenu à Paris du 1er au 5 août. Les promoteurs de ce *Congrès* s'étaient proposé d'affirmer l'unité de la Philosophie, et de contribuer à en restaurer l'idée véritable et traditionnelle. Pour cela, ils se sont efforcés, d'une part, de la distinguer de certaines sciences spéciales, la Psychologie et la Sociologie, avec lesquelles on la confond encore, parce que, constituées les dernières, elles se sont détachées plus tardivement que les autres « du vieux tronc philosophique » ; et d'autre part, de la rapprocher des sciences positives, surtout de celles qui, par leur certitude, leur précision et leur systématisation plus grandes, fournissent une matière plus ample et plus sûre à la réflexion critique, et permettent d'entrevoir ou de rechercher les lois générales de la nature et de l'esprit.

En conséquence, ils avaient consacré une des quatre sections du *Congrès* à la Logique et à l'Histoire des Sciences, et ils avaient convié les savants à prendre part à leurs travaux. Leur appel a été entendu, tant à l'étranger qu'en France ; de nombreux savants, et des plus illustres, ont bien voulu leur accorder leur patronage (1), et, qui plus est, leur apporter le fruit de leurs réflexions. Quelques-uns ont fait défaut au dernier moment, par

(1) Qu'il nous soit permis de citer ici avec reconnaissance les noms de MM. BERTHELOT, LECHALAS, OLIVIER, PAINLEVÉ, PERRIER, H. POINCARÉ, Ch. RICHET, Jules TANNERY, Paul TANNERY (France) ; GEORG CANTOR, MORITZ CANTOR, DEDEKIND, FREGE, HÆCKEL, KLEIN, OSTWALD, SCHRÖDER, VAN'T HOFF, WEISMANN (Allemagne) ; BOLTZMANN, MACH, STOLZ (Autriche) ; MANSION (Belgique) ; KORTEWEG, VAN DER WAALS (Hollande) ; PEANO, VAILATI (Italie) ; VASSILIEF (Russie) ; MITTAG-LEFFLER (Suède).

suite d'empêchements imprévus ; parmi ces abstentions forcées, on a particulièrement regretté celles de M. Georg Cantor (de Halle) qui avait annoncé un mémoire sur les *Nombres transfinis et la Théorie des ensembles*, et de M. Ernst Hæckel (d'Iéna) qui devait exposer les *Principes de sa philosophie zoologique*.

Malgré ces absences, la section III fut celle qui compta le plus de mémoires et d'assistants [1].

Nous n'avons pas l'intention de rendre compte ici de tous les travaux de la section : les procès-verbaux officiels et complets des séances du *Congrès* ont paru déjà dans la *Revue de Métaphysique et de Morale* (n° de septembre) et le lecteur peut s'y reporter pour plus amples renseignements, en attendant la publication intégrale des mémoires dans le tome III de la *Bibliothèque du Congrès* (qui paraîtra cet hiver). Nous voulons seulement analyser les mémoires et résumer les discussions les plus propres à intéresser les mathématiciens et les professeurs de Mathématiques.

L'*Histoire des Sciences* (que le *Congrès* n'avait inscrite à son programme que dans la mesure où elle intéresse l'Histoire de la philosophie et en est inséparable) ne fut représentée que par trois mémoires, mais tous trois d'un grand intérêt et d'une profonde érudition. La question des *Origines du Calcul infinitésimal* a été traitée à la fois par M. Moritz Cantor (de Heidelberg), le savant historien des mathématiques, et par M. Milhaud (de Montpellier), dans un esprit tout différent, ce qui fait que les deux mémoires, loin de se répéter, se complètent à merveille l'un l'autre : M. Cantor insistant surtout sur les origines scientifiques du Calcul infinitésimal et sur la filiation historique des théories et des découvertes ; M. Milhaud s'attachant plutôt à découvrir les racines philosophiques de l'Analyse et cherchant jusque chez les philosophes et géomètres anciens la source des « idées » infinitésimales.

M. Günther, de Munich, avait envoyé un mémoire extrêmement nourri et documenté sur l'*Histoire des origines de la gravi-*

---

[1] Elle avait pour présidents français MM. Henri Poincaré et Jules Tannery, et pour présidents étrangers MM. Moritz Cantor, Peano et Vassilief. La présidence effective des séances fut exercée par M. J. Tannery avec son tact et sa bonne grâce coutumière.

tation, où l'on suit également les progrès parallèles et conjoints de la philosophie et de la science, et où l'on voit les savants de la Renaissance dégager peu à peu les principes de la Mécanique céleste, en luttant contre l'influence néfaste d'Aristote et contre la tradition tyrannique de la physique péripatéticienne. L'auteur rappelle en terminant que pour beaucoup de bons esprits (comme Leibniz) l'hypothèse de l'attraction était un retour aux qualités occultes de la scolastique, et constate qu'en tout cas le succès de la théorie newtonienne a fait triompher pendant plus d'un siècle les actions à distance, et a éclipsé les théories cinétiques et élastiques ébauchées par Gassend, Hobbes, Huygens, et remises en honneur de nos jours par Faraday et Maxwell.

La Logique algorithmique était fort bien représentée au *Congrès* par les mémoires de MM. Mac Coll, Johnson et Poretsky, sans compter ceux de MM. Peano et Schröder, qui, sans traiter expressément de la Logique formelle, procèdent des recherches de leurs auteurs dans ce domaine [1]. Le mémoire de M. Mac Coll (de Boulogne-sur-Mer) est un exposé sommaire de l'ensemble de son système logique, avec ses deux applications principales, qui sont, d'une part, le *Calcul des probabilités*, et, d'autre part, le *Calcul des limites des intégrales multiples* quand on y change l'ordre des intégrations. Cette dernière application recommande particulièrement le système à l'attention des mathématiciens ; c'est elle d'ailleurs qui en a été l'origine et l'occasion.

M. Johnson (de Cambridge), bien connu par ses travaux sur l'Algèbre de la Logique [1], a proposé une généralisation des *constituants* de Boole. M. Poretsky (de Gorodnia, Russie) a exposé son calcul logique, qui procède de celui de M. Schröder, mais qui se distingue par une méthode originale et un choix tout différent des formules fondamentales. Tandis que le calcul de M. Schröder est orienté tout entier (comme l'Algèbre ordinaire) vers la résolution des équations logiques, celui de

---

[1] Cf. Peano, *Formulaire de Mathématiques* et *Revue de Mathématiques*, passim : Schröder, *Algebra der Logik*, 3 vol. (Le dernier est consacré à l'*Algèbre des relations*.) Leipzig, Teubner, 1890-1895.

[2] Voir les articles de M. Johnson sur *The Logical Calculus*. ap. *Mind* (1892). Cf. Whitehead, *Universal Algebra*, Livre II.

M. Poretsky a pour but primordial la recherche de toutes les *formes* d'une égalité logique, c'est-à-dire de toutes les égalités équivalentes (sous une forme différente); puis celle de toutes les *conséquences* et de toutes les *causes* d'une égalité donnée. La méthode consiste dans l'énumération complète des classes du discours, et dans la détermination de celles qui sont équivalentes en vertu de l'égalité proposée. Elle aboutit à la construction d'un tableau qui comprend toutes les classes du discours rangées dans un ordre tel qu'on y lit à la fois toutes les formes, toutes les conséquences et toutes les causes de l'égalité donnée.

M. Schröder (de Karlsruhe), après avoir rappelé les propriétés caractéristiques de la notion d'ordre simple (ou linéaire) que l'Algèbre des Relations lui a permis de formuler avec cinq lettres et deux copules, expose *Une extension de l'idée d'ordre*, qu'il appelle *gradation* (*Rangstufenfolge*) et qui consiste à admettre plusieurs éléments *de même rang*. Au lieu d'une seule relation, on a à en considérer deux : la relation « de rang inférieur » (ou la relation converse « de rang supérieur ») et la relation « de même rang ». Pour montrer l'importance de ces recherches logico-mathématiques, et en même temps leur difficulté, M. Schröder fait remarquer qu'on ne sait pas encore si l'on peut affirmer que « tout ensemble donné est susceptible d'être rangé dans un ordre simple ». On sait quel est l'intérêt capital de cette question pour la théorie générale des ensembles. M. Schröder espère que l'Algèbre des relations permettra de la résoudre un jour. Ainsi cette science nouvelle forme le lien entre la Logique pure (formelle) et les Mathématiques; elle englobe déjà en partie la théorie des ensembles (au point de vue de leur contenance et de leur exclusion) et toute la théorie des substitutions [1].

Les précédents auteurs ont apporté de précieuses contributions à ce qu'on pourrait appeler la Mathématique de la Logique;

---

[1] Le calcul des substitutions n'est, en effet, qu'une branche de l'algèbre des relations; ce qu'on appelle le *produit* de deux substitutions n'est autre chose que leur *produit relatif* (non commutatif); l'*inverse* d'une substitution (s^{-1}) est la relation *converse* de s; enfin la substitution *identique* (qu'on désigne par 1) est la relation d'identité 1', module de la multiplication relative. (V. Schröder, *Algebra der Logik*, t. III.)

l'école italienne a donné de remarquables échantillons de ses travaux sur la Logique des Mathématiques. Quoi qu'on pense, en effet, de l'utilité ou de la commodité du symbolisme logique employé par M. Peano et ses collaborateurs à la *Revue de Mathématiques* et au *Formulaire de Mathématiques*, il faut reconnaître qu'ils ont fait faire de grands progrès à l'analyse des concepts et des principes fondamentaux des Mathématiques, et que, grâce à ce symbolisme (et surtout à la pénétration des savants qui le manient) ils sont parvenus à des résultats merveilleux de rigueur et de subtilité.

Les quatre mémoires présentés au *Congrès* par les mathématiciens italiens offrent un tableau sommaire, mais assez complet, de leurs travaux sur les principales branches des Mathématiques, et rien ne fait plus honneur à l'école italienne et à son chef, M. Peano, que cette entente spontanée de ses collaborateurs, qui ne diminue en rien leur indépendance et leur originalité individuelles.

M. Peano a exposé sa théorie des *définitions mathématiques*. Après avoir analysé, à titre d'exemple, les premières définitions de la *Géométrie* de Legendre, il remarque que toute définition suppose un ensemble de termes non définis ou antérieurement définis ; de sorte que la question de savoir si telle notion est définissable ou indéfinissable, absolument, n'a pas de sens ; il faut spécifier par rapport à quel ensemble de notions considérées comme antérieures, de sorte qu'une même idée peut être définissable ou indéfinissable, suivant le rang qu'on lui assigne dans l'ordre des notions.

M. Peano formule ensuite les règles de la définition. Une définition doit être, d'abord, une égalité logique (équivalence) entre le terme (nom ou signe) à définir et une formule composée de termes définis ou admis sans définition. Une définition doit être complète, c'est-à-dire que la formule doit être intelligible par elle-même, sans aucune addition ni explication verbale. Enfin elle doit être homogène, c'est-à-dire que les deux membres doivent contenir les mêmes lettres variables. Par exemple, l'égalité :

$$0 = a - a$$

n'est pas une définition complète, parce qu'il faut dire ce qu'est a. La proposition complète :

« $0 = a - a$, a étant un nombre quelconque »

n'est pas une définition homogène, car il entre au second membre la lettre variable a qui ne figure pas dans le premier. Il faut dire :

« 0 = la valeur constante de l'expression $(a - a)$, quel que soit le nombre a. »

Dans cette proposition, la lettre a est une variable apparente, car le second membre en est en réalité indépendant.

Pour montrer la nécessité de l'homogénéité des définitions, M. Peano critique la manière dont on définit d'ordinaire les opérations sur les fractions. Quand on définit la somme de deux fractions par la formule suivante :

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$$

on viole la règle de l'homogénéité, attendu que le premier membre est une fonction des deux fractions $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, tandis que le second est une fonction de leurs termes a, b, c, d.

La méconnaissance de cette règle peut conduire à des absurdités ; en effet, supposons que l'addition des fractions soit définie par la formule suivante (analogue à la formule de multiplication) :

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a + c}{b + d}$$

et appliquons-la à deux *valeurs* différentes de la même fraction ; on trouvera d'une part :

$$\frac{2}{3} + \frac{4}{5} = \frac{6}{8}$$

et d'autre part :

$$\frac{4}{6} + \frac{4}{5} = \frac{8}{11}$$

résultats différents, donc contradictoires, étant donnée l'égalité des premiers membres.

Dans son mémoire *Sur les différentes méthodes logiques pour définir le nombre entier*, M. Burali-Forti expose une théorie générale des définitions mathématiques, qu'il divise en trois classes : 1° les *définitions nominales* (celles que M. Peano a définies ci-dessus) qui consistent à égaler un symbole nouveau à une expression composée de symboles déjà connus ; 2° les *définitions par postulats,* qui consistent à caractériser un groupe d'idées par les relations fondamentales qui les unissent ; 3° les *définitions par abstraction*, qui consistent à définir une fonction f (dans un certain domaine) en indiquant dans quels cas on a :

$$fx = fy.$$

Cette dernière forme de définition est fréquemment employée, à savoir toutes les fois qu'on ne définit pas une grandeur en elle-même, mais seulement l'égalité de deux grandeurs de même espèce (ex. : la masse, la température). C'est à cette classe qu'appartient la définition du nombre entier, ou plutôt de l'égalité de deux nombres entiers, par l'*équivalence* (*Gleichzahligkeit*) de deux ensembles [1]. On peut définir par postulats le nombre entier en posant comme axiomes les cinq propriétés caractéristiques de l'ensemble des nombres entiers, comprenant le principe d'induction complète [2]. M. Burali-Forti préfère la *définition nominale* du nombre entier, qu'il obtient en partant de la notion de *grandeur homogène* (par rapport à l'addition) et d'où il déduit les cinq propriétés fondamentales qui constituent la définition par postulats [3].

M. Padoa a présenté un *Essai d'une théorie algébrique des nombres entiers*, précédé d'une *Introduction logique à une théorie déductive quelconque,* qui résume d'une manière lumineuse la logique de l'école italienne. Une théorie déductive est un enchaînement de propositions formelles portant sur un système de symboles non définis et reposant sur un système de principes non démontrés, de sorte que la valeur logique d'une telle théorie est

(1) Définition qui nous paraît d'ailleurs former un cercle vicieux. Cf. *De l'infini mathématique*, 2e partie, livre I, ch. III, et *Sur une définition logique du nombre*, ap. *Revue de Métaphysique et de Morale* de janvier 1900.

(2) Voir *Formulaire de Mathématiques* de M. Peano, t. II, no 3, § 20, 1899.

(3) Voir Burali-Forti, *Les propriétés formales des opérations algébriques*, ch. II, § 1, ap. *Revue de Mathématiques*, t. VI. (Turin, Bocca, 1899.)

absolument indépendante du sens de ces symboles et de la vérité de ces principes, en un mot de *l'interprétation* concrète qu'on peut donner de la théorie. Voici les conditions de la perfection logique d'une théorie déductive. Le système des principes non démontrés sera *irréductible*, s'il n'est pas possible de déduire l'un d'eux de l'ensemble des autres. On reconnaîtra cette irréductibilité en imaginant, pour chacun de ces principes, une interprétation qui ne le vérifie pas tout en vérifiant tous les autres. D'autre part, le système des symboles non définis sera *irréductible* par rapport au système des principes, lorsque de celui-ci il est impossible de déduire la définition de l'un quelconque de ces symboles au moyen des autres. On prouvera cette irréductibilité en inventant, pour chacun des symboles non définis, deux interprétations différentes qui, jointes à une même interprétation de tous les autres symboles, vérifient également le système des principes. La théorie algébrique (c'est-à-dire formaliste et symboliste) des nombres entiers qualifiés [1] repose tout entière sur un système de trois symboles non définis qui peuvent s'énoncer : *entier*, *successif de*, *symétrique de*, et sur un système de sept principes, qui comprennent le principe d'induction complète ; les deux systèmes étant *irréductibles* au sens qui vient d'être défini.

M. Pieri a appliqué ces principes et cet esprit à l'étude de *la Géométrie envisagée comme un système purement logique*. Pour lui, l'idéal de la géométrie est de se vider de tout contenu empirique et intuitif, et de devenir un système *hypothético-déductif* du type défini par M. Padoa. M. Peano a déjà réduit le système des idées fondamentales (ou plutôt des symboles non définis) à trois : le *point*, le *segment* et le *mouvement*. M. Pieri entreprend de les ramener à deux : le *point* et le *mouvement*, en définissant le segment par le mouvement; et il s'efforce de restreindre au mini-

(1) Nous prenons la liberté d'employer et de proposer l'épithète de *qualifié* pour désigner brièvement l'ensemble des nombres positifs, négatifs et nul. La locution de *nombre algébrique*, qu'on emploie quelquefois en ce sens dans l'enseignement élémentaire, est vicieuse pour plusieurs raisons : d'abord parce qu'elle correspond à une conception tout à fait fausse de l'algèbre (les nombres négatifs ne sont nullement propres à l'algèbre); ensuite parce qu'elle engendre une confusion intolérable avec ce qu'on appelle proprement les *nombres algébriques* (racines d'équations entières à coefficients entiers).

mum la part du mouvement en le réduisant à une relation entre quatre points (congruence des deux couples AB, CD) et même entre trois (congruence des deux couples AB, AC). Les trois idées fondamentales se trouvent définies par les vingt postulats que M. Pieri énumère et qui constituent les principes logiques de la géométrie.

A ces importantes contributions de l'école italienne, il convient de joindre le mémoire de M. Vailati (de Syracuse) sur *les difficultés qui s'opposent à une classification rationnelle des sciences*. Nous ne pouvons que signaler ici ceux de M. Vassilief (de Kasan) sur *les principes du calcul des probabilités ;* de M. Mac Farlane (de l'Université de Pensylvanie), sur *les idées et principes du calcul géométrique* (quaternions et analyse des vecteurs) ; de M. Lechalas (de Rouen), sur la *comparabilité des divers espaces* (euclidien et non-euclidiens), et de M. Russell (de Cambridge) sur *l'idée d'ordre et la position absolue* (où l'auteur soutient la thèse paradoxale de l'espace et du temps *absolus*). Mentionnons également les ingénieuses remarques de M. Hadamard sur l'*induction en mathématiques* (« non seulement il n'y a pas de raison pour que la généralisation réussisse, mais il y a souvent des raisons pour qu'elle ne réussisse pas ») et les mémoires de M. Kozlowski (de Cracovie) sur *la combinaison chimique;* de M. Wald (de Kladno, Bohême), *Etude critique sur les principaux concepts fondamentaux de la Chimie;* enfin de M. Houssay sur *les théories atomiques en biologie*, et arrivons au mémoire de M. Henri Poincaré, sur *les principes de la Mécanique*, et à l'intéressante discussion à laquelle il a donné lieu.

Nos lecteurs connaissent déjà les théories philosophiques de M. Poincaré ; il nous suffira donc d'indiquer brièvement les idées essentielles de son mémoire. Analysant tour à tour le *principe d'inertie*, la *loi de l'accélération*, le *principe de la réaction* (égale à l'action), le *principe du mouvement relatif* et le *principe de la conservation de l'énergie* [1], M. Poincaré conclut que tous ces principes constituent, soit des définitions du temps, de la force,

[1] M. Poincaré n'admet pas le *principe de l'indépendance des effets des forces*, comme il a eu l'occasion de le déclarer en discutant avec M. Hadamard. Soit un morceau de fer en présence d'un aimant et d'un autre morceau de fer : l'action qu'il éprouve n'est pas la somme géométrique des actions qu'exerceraient séparément sur lui l'aimant, d'une part, et le morceau de fer, d'autre part.

de la masse, soit des axiomes ou postulats : ces postulats ne sont pas des vérités *a priori*, parce qu'ils ne lui paraissent pas s'imposer d'une manière nécessaire ; et ils ne sont pas non plus des vérités empiriques, car ils sont invérifiables à la rigueur ; ils sont *à peu près* vrais pour des systèmes mécaniques *à peu près* isolés, mais on ne peut affirmer qu'ils soient absolument vrais pour des systèmes absolument isolés, non seulement parce que de tels systèmes sont irréalisables, mais parce que les postulats n'ont plus de sens pour de tels systèmes. On ne peut donc même pas dire qu'ils soient vérifiés approximativement (comme la plupart des lois physiques). En somme, ce sont des conventions, non pas arbitraires, mais commodes, c'est-à-dire appropriées et adaptées à l'expérience. Mais le jour où quelque fait viendrait les contredire, on pourrait toujours le concilier avec les principes au moyen d'hypothèses complémentaires. Ainsi l'expérience a pu suggérer ces principes, mais elle ne pourra jamais les démentir et les ruiner.

M. Painlevé a fait alors ressortir le caractère artificiel et arbitraire que prennent dans cette théorie les principes de la Mécanique. Sans doute, en cas de désaccord entre les principes et les faits, on peut toujours combler l'écart par des hypothèses complémentaires ; mais il est fort remarquable que les faits nouveaux qu'on découvre ou qu'on invente ainsi (faits électriques, magnétiques, etc.) se prêtent à leur tour à une théorie scientifique, se soumettent au principe de causalité et à des lois générales et simples, en un mot apparaissent comme des phénomènes *vrais* et non comme des fictions. On pourrait dire aussi que la loi de Newton est une convention et la remplacer par une autre loi d'attraction (par exemple proportionnelle à la distance), quitte à corriger la divergence par des hypothèses auxiliaires ; mais on s'engagerait par là dans des complications inextricables, d'où l'on ne pourrait dégager aucune loi simple. Cela prouve que si la loi de Newton est une convention, c'est une convention de choix, qui cadre mieux que toute autre avec les faits. En somme, toute la physique est une méthode d'approximations successives : la *convergence* de cette méthode n'est nullement nécessaire *a priori ;* l'accord croissant de nos hypothèses avec les faits prouve (ou constitue) leur vérité ; la *divergence* et la complication croissante des hypothèses sont un signe de fausseté. Les principes de la

Mécanique sont donc vrais, en ce sens qu'ils sont les lois les plus générales du monde physique, imposées et sans cesse vérifiées par l'expérience.

M. HADAMARD objecte d'autre part que si l'expérience ne peut pas vérifier séparément tel ou tel principe, parce que sa vérité dépend des autres principes admis à titre d'hypothèses, elle vérifie néanmoins l'ensemble des principes, conçu comme une hypothèse unique et totale.

M. POINCARÉ reconnaît la justesse de cette remarque pour ce qui est des lois physiques : chaque expérience (ou série d'expériences) fournit en quelque sorte *une* équation entre plusieurs inconnues, de sorte qu'il faut un système d'équations pour déterminer le système des inconnues. Mais il en va autrement pour les principes de la Mécanique et de la Géométrie. Non seulement l'expérience ne nous donne pas assez d'équations pour les déterminer, mais il est absurde de supposer qu'elle puisse jamais nous les donner, et cela parce que les « inconnues » entrent pour ainsi dire dans les problèmes expérimentaux à titre de variables auxiliaires et surérogatoires. Par suite, les hypothèses qu'on peut faire à leur sujet ne sont ni vraies ni fausses.

La même question a été traitée, à un point de vue plutôt didactique que critique, par M. BLONDLOT (de Nancy), dans son *Exposé des principes de la Mécanique*, inspiré des idées de Kirchhoff et de Mach, dont l'idée maîtresse est la distinction de la Mécanique « rationnelle », construction idéale, et de la Mécanique empirique et positive, à laquelle la première est destinée à s'appliquer moyennant le choix d'un système de repères et d'une horloge convenables.

C'est encore un problème analogue qu'a traité M. LE VERRIER (de Paris), en exposant *la genèse et la portée des principes de la thermo-dynamique*. D'une part, il considère ces principes comme des définitions des unités thermiques (quantité de chaleur, température absolue), par rapport aux unités mécaniques, définitions qui deviendraient inutiles le jour où l'on connaîtrait les relations réelles entre les phénomènes thermiques et mécaniques, car ce jour-là les unités thermiques se réduiraient aux unités mécaniques. D'autre part, ces principes apparaissent comme des lois expérimentales approximativement vérifiées ; en réalité, ce sont des lois idéales et *a priori*, qui reposent sur des abstractions irréalisables, mais qui n'en ont pas moins une valeur objective dans la mesure où les faits se rapprochent de ces abstractions (gaz parfaits, phénomènes réversibles, transformations adiabatiques).

On le voit : c'est une question essentiellement philosophique qu'ont agitée les savants que nous venons de nommer ; c'est même la question capitale de la philosophie des sciences et de la théorie de la connaissance : il s'agit toujours de savoir quel est le rapport des mathématiques et de la physique, ou des mathématiques pures et des mathématiques appliquées, de la raison et de l'expérience, de l'idée et du fait ; en un mot, il s'agit de la valeur objective de la science rationnelle. Le fait que des savants de profession ont posé et discuté cette question en vrais philosophes a justifié l'initiative des organisateurs du *Congrès* et réalisé toutes leurs espérances.

Le succès du *Congrès* en général et de la section III en particulier a fait prendre la résolution de le renouveler dans quelques années. Dans la séance de clôture, M. Vassilief a exprimé avec l'approbation unanime le vœu qu'on mît à l'ordre du jour du prochain *Congrès* un petit nombre de questions (par exemple la philosophie de la géométrie) sur lesquelles se concentreraient les travaux et les discussions ; on devrait faire de chacune de ces questions une revue générale qui en exposerait l'état présent et en dresser une bibliographie complète. La commission permanente chargée d'organiser le prochain *Congrès* tiendra certainement compte de ces vœux. Nous espérons que, pour la section III en particulier, l'intérêt des communications que nous venons de résumer stimulera l'émulation des savants, et qu'ils viendront plus nombreux encore au prochain *Congrès de Philosophie*.

Louis Couturat (Paris).

P.-S. — Dans une autre section du *Congrès* a été soulevée une importante question qui intéresse également les mathématiciens et les philosophes : c'est celle de la création d'une langue internationale unique pour faciliter les relations entre les savants de tous les pays civilisés, la publication de leurs travaux et la diffusion de leurs idées. Le *Congrès de Philosophie* a émis un vœu en faveur « de l'unité du langage philosophique » et a élu le signataire de ces lignes comme délégué en vue de l'adoption d'une langue universelle [1]. On sait qu'un vœu analogue, présenté par M. Leau et chaudement appuyé par M. Laisant et plusieurs autres membres, a eu moins de succès au *Congrès des mathématiciens*. Dans la discussion à laquelle il a donné lieu, nous avions invoqué en sa faveur l'autorité de Leibniz. On nous a répondu que la langue universelle rêvée par Leibniz ne faisait qu'un avec sa caractéristique ou son *Calculus ratiocinator*, et que par suite son projet se trouvait véritablement réalisé, soit par l'*Algèbre de la Logique* de M. Schröder, soit par le *Formulaire de Mathématiques* de M. Peano.

Nous pouvons affirmer, après avoir consulté à Hanovre les manuscrits inédits de Leibniz, que c'est là une erreur complète. On y trouve en effet, à côté de nombreux essais de calcul logique, des projets très développés et très détaillés de langue universelle et de grammaire rationnelle, absolument distincts du susdit calcul [2]. Il s'agit si bien d'une *langue* proprement dite, à la fois *parlée* et *écrite*, et non d'un symbolisme ou d'un algorithme, que Leibniz a rédigé des opuscules entiers sur l'usage des particules et des flexions, sur la construction des prépositions, des conjonctions, des pronoms, etc., etc. [3]. Nous en publierons bientôt quelques extraits dans nos *Fragments inédits de Leibniz relatifs à la Logique*. On y trouvera des idées intéressantes et curieuses sur la constitution d'une langue rationnelle [4] dont beaucoup sont déjà réalisées, soit dans l'*Esperanto*, soit dans la *Langue Bleue* de M. Léon Bollack (par exemple : les prépositions dispensent des cas, et les conjonctions dispensent des modes). Les projets de langue universelle peuvent donc se réclamer de l'autorité de Leibniz [comme de celle de Descartes] [5], aussi bien que

---

(1) Cf. Leau, *Une langue universelle est-elle possible?* 1 brochure, 13 p. Gauthier-Villars, 1900.

(2) Par exemple, on lit dans le *Linguæ philosophicæ specimen in geometria edendum*, daté de janvier 1680 : « Nihil autem calculi hic miscebo. »

(3) Voir Bodemann, *Die Leibniz-Handschriften*, Phil. VII, B, III, 76 feuilles.

(4) Cf. le fragment *Lingua rationalis*, ap. *Phil. Schr.*, éd. Gerhardt, t. VII, p. 28.

(5) *Lettre à Mersenne* du 20 novembre 1629. (Éd. Clerselier, t. I, n° 111, p. 498 ; éd. Adam-Tannery, t. I, p. 76.)

les systèmes de logique algorithmique ; les uns et les autres sont d'ailleurs parfaitement compatibles, attendu qu'ils sont radicalement différents en principe et ne sauraient en aucune manière se remplacer.

L. C.

SUR LES POLYGONES DE PONCELET

La recherche des conditions que doivent remplir deux coniques pour qu'on puisse inscrire dans l'une un polygone circonscrit à l'autre, est une question bien connue : elle se résume dans le théorème suivant. énoncé par Poncelet : *s'il existe un polygone de* m *côtés inscrit dans une conique O et circonscrit à une autre* Γ, *il en existe une infinité d'autres du même nombre de côtés*. Beaucoup de problèmes qui se rattachent à cette proposition ont été résolus par des méthodes variées et il est par conséquent utile, et d'un incontestable intérêt, au point de vue de l'enseignement surtout, d'envisager la question dans son ensemble : c'est ce que je me suis proposé de faire, en suivant un beau chapitre d'Halphen sur le sujet [1]. Je diviserai cet exposé en deux parties : l'une, toute élémentaire qui ramène en somme le problème à ses éléments les plus simples, la seconde qui le rattache à la théorie des fonctions elliptiques, et qui suppose la connaisssnce des fondements de cette théorie.

I

Relation biquadratique symétrique entre deux variables. — Les deux sommets situés sur un côté d'un polygone inscrit dans une conique C et circonscrit à une autre conique Γ sont deux points M et M′ de la conique C qui se correspondent sur cette ligne par la condition que la droite qui les joint soit tangente à Γ. On peut de cette manière faire correspondre à tout point M de C, deux

---

[1] HALPHEN. *Traité des fonctions elliptiques*, t. II, ch. x.