Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 2 (1900)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Rubrik: CORRESPONDANCE

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 09.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

CORRESPONDANCE

SUR LE POSTULATUM D'EUCLIDE

25 juin 1900.

De même qu'il fut difficile jadis à Lobatschewsky de se faire comprendre, lorsqu'il voulut exposer la Géométrie nouvelle qu'il venait d'inventer en rejetant le postulatum d'Euclide, de même il est difficile aujourd'hui de se faire entendre de ceux pour qui la question de ce postulatum n'est pas encore épuisée par toutes les recherches sur la Géométrie non-euclidienne, quoique ces recherches forment déjà une littérature considérable, et qui continuent encore à penser que ce postulatum est démontrable. Cet état de choses est regrettable, car, sinon la science elle-même, l'enseignement pour sûr gagnerait beaucoup à l'échange des différentes opinions sur ces questions difficiles ; on parviendrait enfin de cette manière à écarter tous les doutes qui peuvent encore subsister. Vous faites donc très bien d'ouvrir les colonnes de votre excellent journal l'*Enseignement Mathématique* aux partisans des deux opinions opposés sur le postulatum d'Euclide, comme je l'ai appris par le numéro que vous avez eu la bonté de m'envoyer à cause des renseignements qu'il contient sur le congrès international des mathématiciens qui aura lieu à Paris cet été. En vous remerciant de cet aimable envoi, je vous demande la permission de profiter de votre décision pour vous envoyer les réflexions suivantes sur le postulatum d'Euclide.

La possibilité d'existence des autres Géométries que celle d'Euclide, notamment celles de Lobatschewsky d'une part et de Riemann de l'autre, prouve-t-elle vraiment que le postulatum est indémontrable ?

Pour moi, non. La droite d'Euclide possède une propriété caractéristique qui manque aux droites de Lobatschewsky et de Riemann, celle d'engendrer par son mouvement de rotation autour de deux de ses points maintenus fixes une surface de révolution renfermant un volume égal à zéro ; cette droite existe dans la nature, d'après la très juste remarque de M. Andrade, comme l'axe de rotation d'un corps rigide autour de deux points fixes. En rejetant le postulatum d'Euclide, on fait perdre à la ligne droite cette propriété caractéristique ; donc l'existence des Géométries non euclidiennes démontre seulement qu'il existe un lien intime entre le postulatum d'Euclide et cette propriété de la droite ; de sorte que si l'on définit la droite complètement, sans que la propriété mentionnée lui manque, le postulatum doit s'ensuivre.

Il est arrivé au postulatum d'Euclide la même chose qu'au théorème fondamental de l'Algèbre (chaque équation a une racine de la forme $a + b\sqrt{-1}$); tant qu'on restait sur le terrain propre de l'Algèbre, considérant les valeurs particulières du polynôme, on ne pouvait pas le démontrer; mais dès qu'on a passé sur le domaine de la théorie des fonctions, en considérant le polynôme comme variable, on en a obtenu plusieurs démonstrations. De même, comme je vais le montrer, on aura une démonstration du postulatum d'Euclide, si l'on passe du domaine de la Géométrie, qui traite les figures fixes, par conséquent invariables, sur celui de la Cinématique, qui les considère comme en mouvement et par conséquent variables.

D'abord je fais la remarque suivante : si l'on mène par le milieu D de la base AB d'un triangle isocèle ACB une sécante FDE, sa partie extérieure FD sera plus grande que la partie intérieure DF ; en effet si l'on plie la figure suivant la base AB du triangle, le point F tombera en F' en dehors du triangle, l'angle FBD étant obtus tandis que l'angle CBD est aigu ; on aura donc $F'D > E'D$; mais $E'D = ED$, comme cela résulte de l'égalité des triangles BDE' et ADE, dans lesquels on a : $BD = DA$, $\widehat{E'BD} = \widehat{DAE}$; $\widehat{BDE'} = \widehat{ADE}$; donc on a $FD > DE$, c. q. f. d.

Si l'on abaisse une perpendiculaire CG du point C sur la ligne FDE,

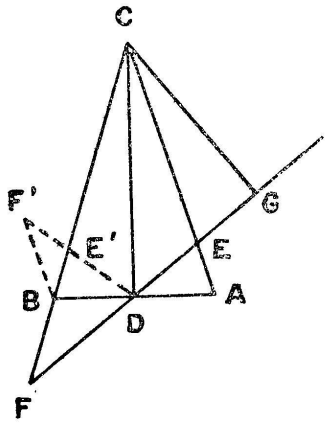

Fig. 1.

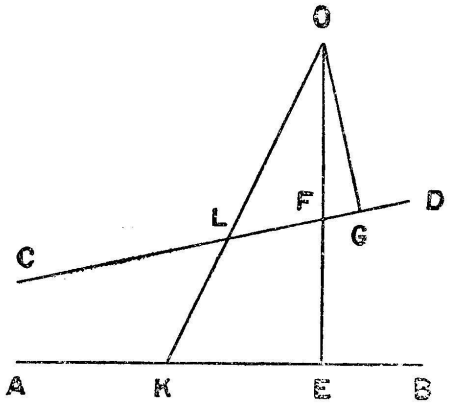

Fig. 2.

on voit par ce qui précède que pour deux angles égaux, ayant le même sommet en C, comme FCD et DCE, celui qui intercepte entre ses côtés le plus grand segment de la droite FG perpendiculairement à CG, sera celui dont les côtés sont plus déviés de cette perpendiculaire CG, ou, autrement dit, plus inclinés sur la droite FG ; car l'angle CDG est moindre que CEG, comme on le démontre par la théorie des triangles égaux.

La différence des deux côtés d'un angle DCE étant plus grande que la projection de DE sur le côté CE, le moins dévié de la perpendiculaire CG, et cette projection augmentant lorsque l'angle DCE prendra la position FCD parce que : 1° FD est $>$ DE, 2° l'angle CDE est moindre que l'angle CEG, la différence mentionnée augmentera elle-

même lorsque l'angle DCE prendra la position FCD. On en conclut que l'accroissement d'une droite inclinée CE à FG, répondant à un même angle, dont on augmente la déviation de la perpendiculaire CG, sera d'autant plus grand, qu'elle est plus déviée de cette perpendiculaire.

L'angle DCE pouvant être aussi petit qu'on le voudra, il s'ensuit, que si l'on fait tourner uniformément la droite CE, inclinée sur FG autour du point C, sa longueur CE, comprise entre le point C et cette droite FG, s'accroîtra de plus en plus rapidement pour devenir égale à l'infini lorsque la déviation de la perpendiculaire CG atteindra une certaine limite, soit α, α étant égal à l'angle droit pour Euclide et moindre que cet angle pour Lobatschewsky. Autrement : le point E, où la droite CE rencontre la droite FG pendant sa rotation uniforme autour du point C, s'éloignera du point C d'un mouvement de plus en plus accéléré jusqu'à ce que sa distance CE devienne infinie, au moment où l'angle ECG atteindra une certaine limite α.

Cela posé, considérons deux droites AB et CD, dont la première AB est perpendiculaire à une troisième EF, l'autre, CD, inclinée sur EF.

Sur le prolongement de EF, au delà de CD, prenons un point O suffisamment éloigné des deux droites pour que la différence des perpendiculaires OE sur AB, et OG sur CD, soit assez petite par rapport à leurs longueurs. Menons par le point O une droite OK qui couperait la droite CD en un point L, situé du côté de la droite OE, opposé à celui où se trouve le point G. Si l'on fait tourner uniformément la droite OK autour du point O, de manière que K s'éloigne du point E, L s'éloignera aussi du point G, et les deux points, K et L s'éloigneront l'un et l'autre du point immobile O, mais le second L plus rapidement que le premier K, la droite OL étant plus déviée de la perpendiculaire OG à CD que ne l'est la droite OK (qui est la même droite) de la perpendiculaire OE à AB ; lorsque l'angle LOG atteindra la valeur limite α, OL deviendra infinie, tandis que OK, n'étant déviée de la perpendiculaire OE que de l'angle α — EOG, aura une valeur finie. Donc le point L, qui était en deçà du point K sur la droite OK, passant au delà pendant que cette droite tourne de l'angle α — LOG dans le mouvement de rotation uniforme autour du point O, doit nécessairement passer par K à un certain instant précédent ; mais alors on aura OL = OK, et par conséquent les deux droites AB et CD se rencontreront. Le postulatum est donc démontré. Quelques doutes pourraient se soulever dans l'esprit de ceux qui s'attachent à la Géométrie de Lobatschewsky, lorsque l'angle FOG serait d'une petitesse suffisante pour faire sentir l'influence de la différence des longueurs des perpendiculaires OE et OG sur l'angle α ; ces doutes peuvent être écartés de la manière suivante. En pliant la figure autour de la ligne AB on obtiendrait une ligne C'D' symétrique de CD ; l'angle entre les perpendi-

culaires abaissées d'un point O sur CD et C'D' serait plus grand que celui entre les perpendiculaires à CD et AB ; mais si les lignes AB et CD ne se rencontrent pas, les lignes CD et C'D' ne se rencontreront pas non plus, se trouvant de côtés différents de la droite AB ; d'autre part, si les droites CD et C'D' se rencontrent en un point P, la droite AB passera nécessairement par le même point, à cause de la symétrie.

On pourrait augmenter davantage l'angle entre les perpendiculaires aux deux droites, en considérant, au lieu des droites données les droites A'B' symétrique de AB par rapport à CD, et A''B'', symétrique de AB par rapport à C'D'.

Remarquons encore que la méthode de démonstration des propositions, en pliant la figure suivant une droite, est exclusivement propre à la Géométrie d'Euclide, parce qu'elle suppose la propriété caractéristique de la droide d'Euclide, indiquée plus haut.

Agréez, etc.

M. Tikhomandritzky (Kharkow).