

SUR LA NOTION DE L'INFINI EN GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE

Autor(en): **Ripert, L.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **2 (1900)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **26.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-3578>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

SUR LA NOTION DE L'INFINI

EN GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE

M. Appell a publié, dans le numéro de mai de l'*Enseignement mathématique*, un court article par lequel il rejette fort loin une idée que j'avais émise, dans le numéro précédent, sur l'utilité et la possibilité de l'introduction de la notion de l'infini dans l'enseignement de la Géométrie élémentaire. N'ayant aucun goût pour la polémique, et éprouvant d'ailleurs quelque scrupule à en engager une avec mon éminent contradicteur, je me serais borné à soumettre à son appréciation les observations que ses critiques me suggéraient s'il n'avait bien voulu m'engager de la façon la plus aimable à publier ma réponse et à y joindre même les réflexions que je pouvais avoir à faire sur deux objections formulées par M. Niewenglowski dans le même numéro du Journal ⁽¹⁾. J'aurai soin, dans ce qui suit, de reproduire, avec les critiques contenues dans l'article de M. Appell, quelques observations complémentaires qui résultent de la correspondance échangée; le lecteur aura ainsi entre les mains tous les éléments de la question.

1. « La Géométrie élémentaire, — dit M. Appell, — a heureusement échappé jusqu'ici aux innovations qui, sous couleur de progrès scientifique, ont entraîné les mathématiques spéciales dans une voie dangereuse. Aussi suis-je bien loin de partager l'opinion de M. Ripert sur l'introduction, dans la Géométrie élémentaire, de l'infini, au sens que M. Ripert donne à ce mot. »

Je ne discuterai ici en aucune façon ce qui constitue une *opinion* de M. Appell, opinion qu'il a d'ailleurs précisée ainsi: « Quand

⁽¹⁾ Voir *Enseignement mathématique*, 1900 (n° 2, p. 127; n° 3, p. 205 et 219).

je parle d'innovations en Géométrie élémentaire, je veux parler, non de changements dans la démonstration ou l'ordre des théorèmes, — ce qui serait exclure tout perfectionnement dans l'enseignement, — mais de changements dans *l'esprit* de la Géométrie élémentaire aussi considérables que l'introduction de l'infini d'une façon systématique, ou encore, l'introduction des éléments imaginaires, etc. »

Il est évident que l'introduction des éléments imaginaires serait absolument contraire à l'esprit de la Géométrie élémentaire ; mais il ne me semble pas qu'il en soit de même pour la notion de l'infini, dans les modestes proportions que j'ai proposées et d'une façon qui, dans ma pensée, n'a rien de systématique. Il est possible, au reste, que je me sois mal fait comprendre à ce sujet : j'y reviendrai plus loin.

Mais est-il bien vrai que la Géométrie élémentaire ait échappé jusqu'ici aux innovations ? Est-il même désirable qu'elle y échappe complètement, les améliorations qui sont dans l'esprit de la Géométrie étant, bien entendu, hors de cause ?

Lorsque, dans leur Cours, MM. Niewengłowski et Gérard placent la première notion du cercle dans l'introduction même, côte à côte avec celle de la ligne droite, au lieu de la réserver pour le Livre II ; lorsqu'ils intervertissent l'ordre d'exposition des théories des parallèles et des perpendiculaires ; lorsqu'ils introduisent, dans l'enseignement même, la Géométrie, etc., ils nous mettent bien en présence de nouveautés. Je m'empresse de reconnaître que ces nouveautés, que, pour ma part, je trouve excellentes, ainsi que je l'ai dit, sont de celles que M. Appell admet comme conformes à l'esprit de la Géométrie, et il m'a même déclaré qu'il partageait entièrement, sur ces divers points, la manière de voir des auteurs cités. Si je rappelle ces innovations, c'est que, dans ma pensée, l'introduction *élémentaire* de la notion de l'infini n'est pas sans relations avec la première, la Géométrie débutant par la notion du cercle considérée comme aussi intuitive que celle de la droite.

Une nouveauté d'une extrême importance, inaugurée, si je ne me trompe, par MM. Rouché et de Comberousse, est l'adjonction à la Géométrie plane d'un livre ou sous-livre de compléments consacrés à l'exposition des théories de la Géométrie moderne.

La plus grande des innovations, pour laquelle il est inutile d'ailleurs d'examiner si elle est conforme ou contraire à l'esprit de la Géométrie, mais qui, si elle est adoptée, modifiera profondément les méthodes d'enseignement, est la *fusion de la planimétrie et de la stéréométrie*. Je n'ai pas à savoir si M. Appell en est ou non partisan ; mais il est certain qu'elle a, surtout en Italie, des partisans éminents et convaincus. Ainsi que l'ont dit MM. Lazzeri et Bassani, dans la préface de leurs *Elementi di Geometria* ⁽¹⁾, cette idée, qui fut considérée comme une utopie lorsque De Paolis l'émit il y a seize ans seulement, a fait rapidement beaucoup de chemin.

Rappellerai-je enfin que, dans son premier numéro, l'*Enseignement mathématique* signalait l'éclosion simultanée des Traités ou Cours de MM. Hadamard, Guichard, Niewenglowski et Gérard, etc., dans notre pays qui possède déjà le Traité que l'on peut dire classique de MM. Rouché et de Comberousse, comme un indice du besoin que l'on semble éprouver de reviser dans une certaine mesure l'enseignement de la Géométrie élémentaire. Depuis, d'autres Traités ont paru à l'étranger. Il y a là un fait sur la signification duquel il est inutile d'insister.

2. Dans mon article *élémentaire*, j'avais donné au mot *l'infini* son sens le plus élémentaire, en le considérant comme la limite de l'infiniment grand. M. Appell m'a fait observer que « l'idée de l'infini en Géométrie est essentiellement relative et tient au mode de coordonnées employées. On parle plus habituellement de la droite de l'infini parce que l'on emploie habituellement les coordonnées cartésiennes, ou mieux les coordonnées homogènes. Mais, en coordonnées polaires, si on rend l'équation $F(x, \theta) = 0$ homogène en remplaçant x par $\frac{x}{\rho}$, les points à l'infini correspondent à $\rho = 0$, et il est commode de les regarder comme confondus en un point unique ($\rho = 0$). »

Cette observation est d'une justesse incontestable ; mais il reste à savoir si, en Géométrie élémentaire, où l'on n'emploie aucun système de coordonnées, il est vraiment impossible de

⁽¹⁾ Voir *Enseignement mathématique*, 1899, n° 1.

donner *une explication* faisant apparaître l'idée de l'infini d'une façon correspondant à celle que l'on emploiera lorsque l'on abordera la Géométrie analytique par les coordonnées cartésiennes et implantant ainsi, dans l'esprit des élèves, une première notion importante.

M. Appell explique ensuite pourquoi, à son avis, l'introduction de la notion de l'infini ne peut venir utilement qu'en mathématiques spéciales ; ceci est une opinion, et je m'abstiens de la discuter.

3. Je viens de parler *d'une explication* ; dans mon article, j'avais dit *une démonstration*, et M. Appell a répondu : « Vouloir « démontrer, comme une vérité absolue, par un théorème énoncé « de la même façon que les théorèmes relatifs aux angles inscrits, « qu'une droite n'a pas deux points à l'infini mais seulement un, « c'est une idée inadmissible. »

J'ai en effet employé le mot *théorème*, et en conséquence, j'avais cherché à préciser un énoncé. J'admets volontiers que ce mot *théorème* est ici impropre, et je l'abandonne. Mais je n'avais pas parlé de vérité absolue ; j'avais au contraire insisté sur les mots *conception* et *convention*. Ceci dit, la contestation me paraît surtout porter sur la forme. Que, au lieu de parler de théorème, on dise : « On peut faire comprendre, par telles considérations, la conception de la droite de l'infini, son utilité, sa nécessité même pour expliquer les faits », c'est une nuance que les professeurs sauront bien établir, et, dans ces conditions, la véritable question est : *Que vaut l'explication ?*

4. « Quant à la démonstration proposée, — dit à ce sujet « M. Appell, — je n'y insisterai pas ; elle repose sur un mode « de transformation vague d'un cercle en une droite, et elle per- « met de démontrer tout ce qu'on veut pour les points à l'infini « de la droite, suivant le mode de correspondance qu'on établit « entre les points du cercle, ou d'une portion du cercle, et ceux « de la droite ».

J'observerai que, m'étant proposé de faire un article ne relevant que de la Géométrie élémentaire, j'ai dû éliminer toutes les considérations qui ne sont pas ordinairement invoquées en Géométrie élémentaire, telles que celle des modes de correspondance

qu'on peut établir entre les points d'un cercle et ceux d'une droite. M. Appell, précisant sa critique, m'a écrit : « Si j'ai dit que votre démonstration était vague, c'est qu'elle pourrait s'appliquer à d'autres courbes. Ainsi, vous pourriez faire le même raisonnement pour un demi-cercle, A et B étant les extrémités du diamètre perpendiculaire à OO' (voir la figure, n° 2, p. 129), le point A allant à l'infini d'un côté et le point B de l'autre ».

Cela ne fait pas doute ; mais, dans l'esprit de la Géométrie élémentaire, on ne considère pas d'autres courbes que le cercle, et, bien que l'observation relative au demi-cercle soit exacte, il y a lieu d'examiner si, l'idée de théorème écartée, mon *explication* demeure contraire à l'esprit de la science en cause et si elle n'est pas de nature à faire saisir par les élèves une convention importante, quand elle aura été précisée de manière à ne plus donner prise à ce reproche de *vague* que lui adresse M. Appell.

Ceci m'amène à examiner les objections de M. Niewenglowski (n° 3, p. 219).

5. La première est : « Le point O' a pour limite, quand le « rayon du cercle grandit indéfiniment, le point à l'infini sur la « perpendiculaire à la droite $x'x$ menée par O. Il ne peut donc « servir à définir le point à l'infini sur $x'x$. » — Il est absolument vrai que, si l'on considère le point O' comme se déplaçant sur le diamètre OO' , normal à $x'x$, sa limite est le point à l'infini sur OO' , et ceux qui sont fixés sur la question peuvent même dire qu'il est tout aussi bien à l'infini en bas qu'à l'infini en haut. Mais il est vrai aussi que, si l'on regarde le cercle comme engendré, ainsi que je l'ai dit (n° 2, p. 129), par deux mobiles partant de O et parcourant dans des conditions identiques la circonférence, — mode de génération qui exclut l'intervention du centre et des diamètres ⁽¹⁾, — on ne peut arriver à O' qu'en

(1) Je me suis servi, pour désigner O' , de l'expression usuelle : *point diamétralement opposé à O*. Mais il est visible que le diamètre n'est pas, au fond, dans la question et que l'on peut se borner à dire que O' est le point de rencontre des deux mobiles. La notion de longueur, et même celle d'aire, sont intuitives ; elles résultent, dès le début, de la considération d'une circonférence et d'un cercle. — Enfin, j'ai placé la notion de l'infini au commencement du livre III ; on peut la reporter, si l'on veut, à la fin du livre IV, pourvu qu'elle reste en Géométrie plane. Si l'idée est juste, de pareils détails ne peuvent suffire pour la faire rejeter.

passant par toutes les positions intermédiaires ; pour y arriver quand le rayon, par hypothèse, devient infini, il est indifférent de prendre la voie \overrightarrow{Ox} ou la voie $\overleftarrow{Ox'}$, et, comme, dans cette hypothèse, on ne peut plus sortir de $x'x$, si cela ne *démontre* pas, en toute rigueur, que le point à l'infini sur $x'x$ est unique, cela *montre* au moins que l'on ne saurait en concevoir deux, ce qui, au point de vue *explication*, est sensiblement la même chose.

D'ailleurs, cette explication peut être précisée, et c'est un de ces détails que tout professeur aurait trouvé aisément. Après avoir insisté sur ce fait que, sur le cercle, il n'y a qu'un seul point O' acquis simultanément par les deux mobiles et qui ne peut être coté que $\pm C$ ($2C$ étant la longueur totale de la circonférence ou du trajet à parcourir), on peut dire : Ouvrons le cercle en O' au moment précis où ce point est acquis, et développons-le sur $x'x$, de part et d'autre de O ; nous aurons une droite limitée $O'O'$, ayant O pour milieu et pour extrémités deux points O' provenant l'un et l'autre du point O' du cercle et cotés l'un comme l'autre, $\pm C$. Il en sera de même quels que soient l'ampleur du cercle considéré, et par suite, l'éloignement des deux extrémités O' de la droite limitée, etc.

6. M. Niewenglowski remarque en second lieu, que « le cercle ne se confond pas avec la droite $x'x$ quand son rayon grandit indéfiniment ; sa limite se compose de deux droites : la droite $x'x$ et la droite de l'infini du plan considéré ». Cette remarque peut être rapprochée d'une note à peu près identique que l'on trouve à la page 205 du tome I du cours Niewenglowski-Gérard : « En réalité, le cercle C a pour limite un système de deux droites : la droite Δ et la droite de l'infini. »

Oui, cela est vrai si l'on admet que la droite de l'infini existe, qu'on peut la considérer comme normale à OO' si l'on veut, que le cercle qui, en principe, est une courbe fermée, s'ouvrira latéralement à la limite, aux points à l'infini situés sur le diamètre perpendiculaire à OO' ; que, Ω étant le centre, et bien que l'on ait toujours $O\Omega = \Omega O'$, on aura, à la limite, $O\Omega = \infty$ et $\Omega O' = 0$, si l'on veut, etc. La note de la page 205 a visiblement pour objet d'éviter une objection ; mais cette note est incompréhensible pour les lecteurs du tome I, puisque la notion de la droite de

l'infini est rejetée, à la fin du tome II, dans les compléments sur les coniques, à moins qu'ils n'aient un professeur qui, en dépit du programme, leur a donné quelques explications. D'ailleurs, cette observation n'est pas faite pour répondre à une critique par une critique, mais seulement pour montrer que les auteurs eussent été plus à l'aise s'ils avaient eux-mêmes, au préalable, donné ces explications.

Pourquoi d'ailleurs ne pourrait-on pas dire, *couramment* et *provisoirement*, que la limite d'un cercle dont le rayon croît indéfiniment est une droite ?

Est-ce qu'on ne parle pas couramment de la corde commune à deux cercles, sans se croire obligé d'ajouter qu'il y a, *en réalité*, deux cordes communes, celle que l'on considère et la droite de l'infini ?

Est-ce que l'on ne dit pas couramment que la parabole est la limite soit d'une ellipse, soit d'une hyperbole, variant dans telles et telles conditions ? Et peu de professeurs se croient dans la nécessité d'ajouter que, en réalité, la limite se compose de deux portions de coniques, celle qui devient la parabole et une autre rejetée à l'infini et que l'on abandonne, cette *demi-conique* s'aplatissant, par convention, avec tous ses éléments, sur la droite de l'infini, si bien que l'on peut dire que la parabole a son centre et un sommet (trois, si l'on veut) à l'infini, que la droite de l'infini est un axe, une tangente, une asymptote double, la demi-conique elle-même, etc. Ce sont des choses bien peu conformes à la *réalité* et qui ne deviennent explicables que lorsque l'on s'est familiarisé avec la conception de Poncelet et les conventions qui en sont la conséquence.

La vérité est donc que : 1° toutes ces notions sont inintelligibles, tant que l'on n'a pas expliqué la droite de l'infini ; 2° on peut très bien, tant que cette explication n'a pas été donnée, dire qu'une droite est la limite d'un cercle, parce que cette notion, sans être rigoureusement exacte, est en quelque sorte parlante ; 3° lorsque l'on sera suffisamment avancé, on observera qu'il y a une portion de cercle à l'infini, se confondant, *par convention*, avec la droite de l'infini et qu'il faut considérer comme venant s'ajouter à la portion du cercle qui subsiste et qui se confond *en réalité* avec la droite $x'v$.

7. M. Appell observe que la notion de l'infini doit venir en mathématiques spéciales comme une conséquence de la transformation homographique du plan. C'est en effet ainsi qu'elle devrait être logiquement enseignée ; malheureusement, l'homographie ne fait pas partie des programmes classiques ⁽¹⁾. On peut dire cependant qu'elle est, *par le fait*, dans la Géométrie élémentaire, puisque tous les traités de Géométrie élémentaire, depuis celui de MM. Rouché et de Comberousse, contiennent, comme je l'ai dit, un Livre de compléments. Cela étant, je me borne à dire : « Quelques notions sur les éléments de l'infini peuvent et doivent trouver place dans ces compléments ». J'ai exposé mon idée telle que je la comprends ; je ne me dissimule nullement que, à cause de mon inexpérience en matière d'enseignement, elle est susceptible de modification dans les détails et *dans l'application* ; mais, la croyant juste et utile, je la verrais avec regret rejetée *dans son principe* sans un examen suffisant.

L. RIPERT (Paris).

(1) Voir H. LAURENT, *Les Mathématiques spéciales en France (Enseignement mathématique)*, 1899, n° 1, p. 40).
