Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 2 (1900)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LA TRANSCENDANCE DES NOMBRES e ET
Autor: Jamet, V.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-3576

De plus, chaque progrès réel entraîne nécessairement la découverte de méthodes plus incisives et plus simples, permettant à chaque géomètre un accès relativement facile à toutes les parties de notre science.

D. Hilbert (Göttingue).

SUR LA TRANSCENDANCE DES NOMBRES e ET π (1)

1. Depuis 1873, époque où M. Hermite, dans son *Mémoire sur la fonction exponentielle*, a démontré la transcendance du nombre e, de nombreux géomètres, parmi lesquels il faut citer en première ligne M. Hurwitz (*Math. Annalen*, 1893), ont cherché à donner à sa démonstration une forme plus élémentaire. D'autre part, le travail analogue de M. Lindemann, au sujet du nombre π, (*Math. Annalen*, 1882), a provoqué, depuis son apparition, de nombreuses recherches entreprises dans le même sens. Parmi les géomètres qui se sont signalés dans cet ordre d'idées, il en est, comme M. Hilbert, à qui l'on doit d'importantes simplifications ; mais M. Gordan a eu le mérite de ramener à des considérations d'ordre purement élémentaire la démonstration d'un théorème de M. Lindemann, entraînant, comme conséquences, la transcendance du nombre e, et la transcendance du nombre π. Les travaux de M. Gordan ont été magistralement exposés par M. Klein, dans son opuscule intitulé : *Sur certaines questions de Géométrie*

(1) Ainsi qu'on peut le voir dès les premières lignes de l'article de M. Jamet, son étude a un caractère nettement pédagogique, et elle nous semble constituer à ce point de vue un progrès fort important. Il s'agit de l'un des problèmes les plus fameux dans l'histoire des sciences mathématiques, celui de la quadrature du cercle ; et, en somme, l'impossibilité n'en a été rigoureusement démontrée qu'à partir des travaux de MM. Hermite et Lindemann. Apporter à cette démonstration des perfectionnements qui aient pour résultat de lui donner un caractère de plus en plus élémentaire est à notre avis tout à fait intéressant au point de vue qui nous préoccupe surtout ici. Aussi remercions-nous bien sincèrement M. V. Jamet de son importante contribution à la transcendance des nombres e et π.

(Note de la Rédaction).

élémentaire, dont on doit une rédaction française, à M. Griess (Paris, Nony, 1896).

Le théorème de M. Lindemann, auquel nous faisons allusion, est celui-ci : « *L'égalité*

$$A_0+A_1(e^{a_1}+e^{a_2}+\ldots+e^{a_n})+A_2(e^{b_1}+e^{b_2}+\ldots+e^{b_q})+\ldots$$
$$+A_m(e^{l_1}+\ldots+e^{l_r})=0$$

où A_0, A_1, A_2 ... A_m sont des entiers, et où les exposants écrits dans une même parenthèse sont les racines d'une équation algébrique à coefficients entiers, est impossible. »

Nous voulons apporter, s'il est possible, une légère simplification à la méthode de M. Gordan. Cet auteur s'est servi, avec une habileté rare, du symbole

$$h^r = 1.2.3\ldots r,$$

mais nous pensons qu'on peut substituer à cet heureux artifice de calcul l'emploi de la formule des accroissements finis, adaptée aux fonctions d'une variable imaginaire, et procéder ensuite comme l'a fait M. Hurwitz pour démontrer la transcendance du nombre e.

2. Nous prenons pour point de départ l'identité

$$D.e^{-x}[F(x)+F'(x)+\ldots+F^m(x)]=-e^{-x}F(x)$$

où $F(x)$ désigne un polynôme entier, de degré m.

Nous rappelons d'ailleurs que si l'on désigne par $\Phi(z)$ une fonction d'une variable, finie, continue, et pourvue d'une dérivée, au moins quand le point z décrit le chemin rectiligne qui va du point z_0 au point Z, il est possible de trouver un nombre λ, compris entre zéro et 1, un argument réel ω, et une quantité algébrique réelle ou imaginaire ξ, représentée par un point situé sur le chemin considéré, de telle sorte que l'on ait :

$$\Phi(Z)-\Phi(z_0)=\lambda e^{\omega i}\Phi'(\xi).(Z-z_0).$$

---

(1) Voir par exemple, MANSION, *Principes d'une theorie nouvelle des fonctions d'une variable imaginaire* (Annales de la Société scientifique de Bruxelles, 9e année, 1885-1886, 2e partie); la démonstration de cette formule, que M. Darboux avait d'ailleurs établie antérieurement à M. Mansion, fait l'objet du paragraphe IX.

Cette formule est applicable, notamment, si l'on suppose

$$\Phi(z) = e^{-z}[F(z) + F'(z) + \ldots + F^m(z)]$$

avec $z_0 = 0$ et $Z = a_1$ ($F(x)$ désigne un polynôme entier, de degré m). Nous en concluons que, quel que soit a_1,

$$e^{-a_1}[F(a_1) + F'(a_1) + \ldots + F^m(a_1)] - [F(0) + \ldots + F^m(0)] = -\lambda e^{\omega_1 i} F(\xi_1) . e^{-\xi_1}\xi_1$$

$\lambda_1 . \omega_1$, ξ_1, remplissant les conditions énoncées au sujet de λ, ω, ξ. La formule précédente équivaut à celle-ci

$$e^{a_1}[F(0) + F'(0) + \ldots + F^m(0)] = F(a_1) + \ldots + F^m(a_1) + \lambda_1 e^{a_1 + \omega_1 i - \xi_1} F(\xi_1)\xi_1 .$$

Supposons que a_1, soit racine d'une équation algébrique à coefficients entiers $f_a(x) = 0$, et soient a_2, a_3, ... a_n ses autres racines. Nous établirons une égalité analogue par rapport à chacune de ces racines, puis en ajoutant membre à membre les n égalités obtenues de la sorte, nous trouverons

$$[F(0) + F'(0) + \ldots + F^m(0)]\left(e^{a_1} + e^{a_2} + \ldots + e^{a_n}\right) = \sum_{i=1}^{i=n} F(a_i) + \sum_{i=1}^{i=n} F'(a_i) + \ldots + \sum_{i=1}^{i=n} F^m(a_i) + \sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i e^{a_i - \xi_i + \omega_i\sqrt{-1}} F(\xi_i)(\xi_i).$$

Au second membre de cette égalité, la somme de tous les termes, sauf le dernier, est une fonction symétrique entière des racines de l'équation $f_a(x) = 0$. Si, de plus, le polynome F est à coefficients entiers, cette fonction est égale au quotient d'un nombre entier par la puissance, d'exposant m, du coefficient de x^n dans le développement du polynôme $f_a(x)$; soit a ce coefficient ; nous transformons l'égalité précédente comme il suit :

$$[F(0) + F'(0) + \ldots + F^m(0)]\, a^m \left[e^{a_1} + e^{a_2} + \ldots + e^{a_n}\right] = B + a^m \sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i \xi_i e^{a_i - \xi_i + \omega\sqrt{-1}} F(\xi_i)$$

B désignant un nombre entier.

3. Composons maintenant le polynôme $F(x)$ de la manière suivante. Soient, outre l'équation $f_a(x) = 0$, d'autres équations algé-

briques à coefficients entiers, $f_b(x)=0$, $f_c(x)=0$ ... $f_l(x)=0$, dont la première a pour racines b_1, b_2, ... b_q, la deuxième c_1, c_2 ... la dernière l_1, l_2, ... l_r. Nous poserons

$$F(x)=x^{p-1}[f_a(x).f_b(x)\ldots f_l(x)]^p$$

p désignant un entier quelconque. Je dis que la somme

$$F(0)+F'(0)+\ldots+F^m(0)$$

sera un entier, divisible par $1.2.3\ldots\overline{p-1}$, et que B sera divisible par $1.2.3\ldots p$.

En effet, si l'on développe le polynôme F (x) et qu'on l'ordonne par rapport aux puissances croissantes de x, on trouvera un développement de la forme

$$F(x)=\alpha x^{p-1}+\alpha_1x^p+\alpha_2x^{p+1}+\ldots+\alpha_m x^m$$

α, α_1, α_2,... α_m désignant des entiers. On en déduira

$$F(0)=0, \qquad F'(0)=0,\ldots \qquad F^{p-2}(0)=0,\ldots$$

puis

$$F^{p-1}(0)=1.2.3\ldots\overline{p-1}\,\alpha, \qquad F^p(0)=1.2.3\ldots p.\alpha_1,$$

et ainsi de suite.

Il faut observer que α est la puissance p^{me} d'un entier qui ne dépend nullement de p, savoir, le produit des termes constants pris dans les polynômes

$$f_a, \qquad f_b,\ldots \qquad f_l.$$

Nous appellerons ce produit M, et nous trouverons :

$$F(0)+F'(0)+\ldots+F^m(0)=1.2.3\ldots\overline{p-1}\,(M^p+\mathfrak{M}p).$$

ce qui démontre la première de nos deux propositions.

De plus, on voit qu'il est possible de choisir p de telle sorte que ce nombre ne divise ni M^p, ni même le produit de M^p par une puissance quelconque d'un entier donné A ; il suffit que parmi les facteurs premiers de p, il y en ait au moins un qui n'entre pas dans la décomposition du produit MA en facteurs premiers.

4. En second lieu, faisons, dans le polynôme F (x), la trans-

formation $x = a_i + x'$, et ordonnons le polynôme obtenu par rapport aux puissances croissantes de x'.

Nous trouvons un développement de la forme

$$F(x) = x'^p G_0(a_i) + x^{p+1} G_1(a_i) + \ldots + x'^m G_m(a_i).$$

G_0, G_1,... G_m désignant des polynômes entiers, à coefficients entiers, dont le degré ne dépasse pas m. Mais, pour $x = a_i$, le polynôme $F(x)$ et ses dérivées successives prennent les mêmes valeurs que pour $x' = 0$, et l'on en déduit :

$$F(a_i) = 0 \qquad F'(a_i) = 0 \ldots \qquad F^{p-1}(a_i) = 0$$

$$F^p(a_i) = 1.2.3\ldots pG_0(a_i), \qquad F^{p+1}(a_i) = 1.2\ldots\overline{p+1}\, G_1(a_i),$$

et ainsi de suite. Par conséquent :

$$\sum_{i=1}^{i=n} F(a_i) + \sum_{i=1}^{i=n} F'(a_i) + \ldots + \sum_{i=1}^{i=n} F^m(a_i) = 1.2.3\ldots p\Big[\sum_{i=1}^{=n} G_0(a_i)$$

$$+ (p+1)\sum_{i=1}^{i=n} G_1(a_i) + \ldots\Big].$$

Or le facteur écrit entre crochets, au second membre de cette égalité, est égal à une fonction symétrique entière, à coefficients entiers, de a_1, a_2,... a_m, et le degré de cette fonction est au plus m. Donc le second membre de cette égalité a une expression de la forme :

$$\frac{1.2.3\ldots p.C}{a^m}.$$

ou C désigne un entier ; et le numérateur de cette fraction est précisément le nombre que nous avons désigné par B.

La deuxième proposition énoncée au début du paragraphe 3 est donc démontrée.

5. En résumé, le polynôme $F(x)$ étant choisi comme il a été dit au paragraphe 3, on peut trouver deux entiers M et C, tels qu'on ait

$$1.2.3\ldots\overline{p-1}\,(M^p + \mathfrak{M}p)\, a^m \sum_{i=1}^{i=n} e^{a_i} = p!C + a^m \sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i \xi_i e^{\omega_i \sqrt{-1} + a_i - \xi_i} F(\xi_i)$$

les λ étant des nombres compris entre zéro et 1, les ω étant réels, et les ξ remplissant la condition

$$|\xi_i| < |a_i|.$$

De cette formule on déduit la suivante

$$(1) \quad (\mathrm{M}^p + \mathfrak{M}p)\, a^m \sum_{i=1}^{i=n} e^{a_i} = p.\mathrm{C} + \frac{a^m}{1.2.3\ldots \overline{p-1}} \sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i \xi_i e^{\omega_i \sqrt{-1} + a_i - \xi_i} \mathrm{F}(\xi_i)$$

6. Cela posé, considérons l'expression

$$(2) \qquad \mathrm{A}_0 + \mathrm{A}_a \sum_{i=1}^{i=n} e^{a_i} + \mathrm{A}_b \sum_{i=1}^{i=q} e^{b_i} + \ldots + \mathrm{A}_l \sum_{i=1}^{i=r} e^{l_i}$$

où les lettres A_0, A_a, ... A_l désignent des entiers, et où les racines des équations $f_a = 0$, $f_b = 0$ ... $f_l = 0$, dont les premiers membres sont des polynômes entiers, à coefficients entiers, ont été désignées, respectivement par a_1, $a_2 \ldots a_n$, b_1, $b_2 \ldots b_q$, ... l_1, $l_2 \ldots l_r$. Je dis, avec MM. Lindemann et Gordan, que cette expression n'est pas nulle. En effet, soient, dans les polynômes f_a, f_b, ... f_e, a, b, c, ... l, les coefficients des plus hautes puissances de x. A l'égard des équations $f_b = 0$, $f_c = 0 \ldots f_e = 0$, établissons les égalités analogues à (1) et additionnons-les membre à membre, après avoir multiplié les deux membres de la première par $\mathrm{A}_a\, b^m c^m \ldots l^m$, de la deuxième par $\mathrm{A}_b\, a^m c^m \ldots l^m$, et ainsi de suite. Nous trouverons une égalité de la forme :

$$\begin{aligned}
&(\mathrm{M}^p + \mathfrak{M}p)\, a^m . b^m \ldots l^m (\mathrm{A}_a \Sigma e^{a_i} + \mathrm{A}_b \Sigma e^{b_i} + \ldots + \mathrm{A}_l \Sigma e^{l_i}) \\
&= \mathfrak{M}p + \frac{(abc\ldots l)^m}{1.2.3\ldots p} \left[\mathrm{A}_a \Sigma \lambda_i \xi_i e^{\omega_i \sqrt{-1} + a_i - \xi_i} \mathrm{F}(\xi_i) + \ldots \right. \\
&\qquad \left. + \mathrm{A}_l \Sigma \mu_i \sigma_i e^{\theta_i \sqrt{-1} + l_i - \sigma_i} \mathrm{F}(\sigma_i) \right]
\end{aligned}$$

les nombres μ, θ, σ, jouant le même rôle que les nombres λ, ω, ξ. Si donc l'expression (2) était nulle, le second membre de cette dernière égalité devrait être égal et de signe contraire à

$$(3) \qquad \mathrm{A}_0 (abc\ldots l)^m (\mathrm{M}^p + \mathfrak{M}p),$$

et je dis qu'on peut disposer de p de telle sorte qu'il en soit autrement. En effet, si nous supposons (hypothèse toujours possible) que, parmi les facteurs premiers de p, il y en ait au moins un qui n'entre pas dans la décomposition du nombre

$$A_0 M a.b.c\ldots l$$

en facteurs premiers, le nombre (3) ne sera pas divisible par p, et par conséquent ne sera pas nul ; et cependant il devrait être égal à une somme de deux parties, dont l'une est entière et divisible par p, tandis que, conformément à la démonstration suivante, la deuxième partie pourrait être supposée numériquement inférieure à 1.

7. Pour établir ce dernier point, observons que, quand le point z décrit le rayon vecteur d'un quelconque des points a_1, a_2 ... a_n, b_1, b_2, ... b_q ... l_1, l_2,... l_r le produit

$$f_a(z)\, f_b(z) \cdots f_l(z)$$

conserve un module plus petit qu'un nombre constant ρ, et que le module de z reste au-dessous d'un nombre constant μ, qu'on peut supposer inférieur à 1. La fonction e^z conserve elle-même un module plus petit qu'un nombre constant ν, et ce nombre est une limite supérieure des modules des facteurs tels que $e^{a_1-\xi_1}$, $e^{a_2-\xi_2}$ ... $e^{l_r-\sigma_r}$. Enfin les facteurs tels que $\lambda_i\, e^{\omega_1\sqrt{-1}}$, ... $\mu_r\, e^{\omega_r\sqrt{-1}}$, ont des modules inférieurs à l'unité ; le degré m du polynôme $F(x)$ est égal à

$$(n+q+\ldots+r)\,p-1$$

et le terme :

$$\frac{(abc\ldots l)^m}{1.2.3\ldots p}\Bigg[A_a\sum_{i=1}^{i=n}\lambda_i\,\xi_i\,e^{\omega_i\sqrt{-1}+a_i-\xi_i}F(\xi_i)\,\xi_i+\ldots$$

$$+A_l\sum_{i=1}^{i=r}\mu_i e^{\omega_i\sqrt{-1}+l_i-\sigma_i}F(\sigma_i)\,\sigma_i\Bigg]$$

a un module plus petit que

$$\frac{\left[\mu\rho\,(abc\ldots kl)^{n+q+\ldots+r+1}\right]^p}{1.2.3\ldots\overline{p-1}}\left[|A_a|+|A_b|+\ldots+|A_l|\right].\frac{\nu}{abc\ldots l}.$$

Or il est possible de choisir p de telle sorte que cette limite supérieure soit plus petite que 1. Le théorème est donc démontré.

8. Si maintenant on veut déduire de là le théorème de M. Hermite, c'est-à-dire démontrer que l'égalité

$$A_0 + A_1 e + A_2 e^2 + \ldots + A_m e^m = 0$$

est impossible, si A_0, A_1, ... A_m sont des entiers, il suffit d'appliquer la méthode précédente au cas où les polynômes f_a, f_b, ... f_l sont définis comme il suit

$$f_a = x - 1, \qquad f_b = x - 2, \ldots \qquad f_l = x - m, \ldots$$

ce qui revient, au fond, à répéter la démonstration de M. Hurwitz.

9. Si l'on veut en déduire la transcendance du nombre π, on observe, avec M. Hilbert, que s'il existait une équation algébrique à coefficients entiers, admettant parmi ses racines le nombre πi, et si l'on désignait ces racines par a_1, a_2 ... a_k, le produit

$$(1 + e^{a_1})(1 + e^{a_2})(1 + e^{a_k})$$

aurait un facteur égal à $1 + e^{\pi i}$, c'est-à-dire à zéro. Donc ce produit serait nul. Mais si on l'effectue, on trouve une expression de la forme

$$1 + e^{\beta_1} + e^{\beta_2} + \ldots + e^{\beta_k}$$

où β_1, β_2 ... β_k désignent les racines d'une équation algébrique à coefficients entiers. Parmi ces racines, quelques-unes peuvent être nulles ; s'il en est ainsi, la somme des exponentielles qui leur correspondent est un nombre entier ; celles d'entre elles qui ne sont pas nulles, savoir, β_1, β_2 ... β_h sont les racines d'une équation algébrique à coefficients entiers, et l'on est conduit à démontrer l'impossibilité d'une identité de la forme

$$a + e^{\beta_1} + e^{\beta_2} + \ldots + e^{\beta_h} = 0$$

ou a désigne un nombre entier. On retombe encore sur un cas particulier du théorème de M. Lindemann.

V. Jamet (Marseille).