Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 2 (1900)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: PROBLÈMES MATHÉMATIQUES

Autor: Hilbert, D.

Kapitel: II. Problèmes empruntés a l'arithmétique et a l'algèbre

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-3575

3. *Axiomes de la Physique.*

Établir les systèmes d'axiomes du Calcul des probabilités, de la Mécanique rationnelle et des différentes branches de la Physique, puis fonder sur ces axiomes l'étude rigoureuse de ces sciences.

II. Problèmes empruntés a l'arithmétique et a l'algèbre

4. *Problème de Riemann sur les nombres premiers.*

Démontrer dans toute leur étendue les propositions formulées par Riemann sur la fonction $\zeta(s)$, en particulier la suivante :

La différence entre le nombre des nombres premiers inférieurs à une quantité x *et le logarithme intégral de cette quantité devient infinie avec* x *d'un ordre égal ou inférieur à* $\sqrt{\mathrm{x}}$.

Etendre les propositions de Riemann à la fonction analogue $\zeta_{\mathrm{k}}(\mathrm{s})$ *correspondant à un corps algébrique* k :

$$\zeta_k(s) = \sum \frac{1}{\{n(\mathrm{j})\}^s}$$

($n(\mathrm{j})$ désigne la norme de l'idéal j ; la somme s'étend à tous les idéaux j du corps).

5. *Certains nombres sont-ils transcendants ou du moins irrationnels ?*

Démontrer que la fonction $\mathrm{e}^{i\pi z}$ *a une valeur transcendante, lorsque la variable* z *est algébrique irrationnelle.*

Examiner si les puissances a^{β} *ont toujours des valeurs transcendantes ou du moins irrationnelles, lorsque la base est un nombre algébrique et l'exposant un nombre algébrique irrationnel.* (Exemples : $2^{\sqrt{2}}$, $e^{\pi} = i^{-2i}$).

6. *Les solutions de l'équation du 7e degré ne peuvent pas s'obtenir par la Nomographie.*

La Nomographie permet de résoudre une équation lorsque les racines peuvent être obtenues par *une suite finie d'opérations ne portant que sur deux paramètres.* Il s'agit de *démontrer que l'équation générale du 7e degré ne rentre pas dans cette catégorie.*

7. *Géométrie de situation des courbes et des surfaces algébriques.*

Harnack a déterminé le nombre maximum de traits de courbe fermés et séparés les uns des autres dont peut se composer une courbe algébrique d'ordre m. On demande *d'étudier la situation réciproque de ces traits ; d'établir un théorème analogue à celui de Harnack pour les surfaces algébriques et d'examiner ensuite la situation réciproque des diverses nappes.*

III. Problèmes empruntés a la théorie des fonctions

La notion de fonction est tellement générale, que, dans une étude approfondie, il faut se borner à n'en considérer que certaines classes particulièrement importantes.

Si l'on choisissait la classe des fonctions définies par des équations différentielles algébriques, un certain nombre de fonctions intéressantes échapperaient à nos recherches (ainsi la fonction $\zeta(s)$ de Riemann).

Si, d'autre part, nous considérions toutes les fonctions continues ayant des dérivées de tous les ordres, nous ne pourrions pas employer la méthode si souple des séries de puissances.

Il paraît donc légitime de vouer une attention toute spéciale aux fonctions analytiques ; les fonctions importantes étudiées jusqu'à présent rentrent du reste toutes dans cette catégorie.

8. *Caractère analytique de certaines fonctions rencontrées dans le calcul des variations.*

Un problème du calcul des variations

$$\int\int F(z, p, q; x, y)\, dx\, dy = \text{min.} \qquad \left[\frac{\partial z}{\partial x} = p, \frac{\partial z}{\partial y} = q\right]$$

sera dit *régulier*, lorsque la fonction F est analytique et lorsqu'elle satisfait à l'inégalité

$$\frac{\partial^2 F}{\partial p^2} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial q^2} - \left(\frac{\partial^2 F}{\partial p \partial q}\right)^2 > 0.$$

Démontrer que la solution z *d'un problème régulier est nécessairement une fonction analytique des variables* x *et* y.

Voici encore un problème analogue plus spécial :