CORERSPONDANCE

Paris, mai 1900.

Mon cher Laisant,

L'article de M. Redl dans le dernier numéro de *l'Enseignement mathématique*, m'a remis en mémoire les analogies de Néper et de Delambre. Il y a quelque quarante ans, je faisais de la Cristallographie et en usais souvent ; mais il me fallait toujours les rechercher dans les traités, faute d'une démonstration simple me permettant de les retrouver rapidement ; j'y arrivai enfin comme suit.

Inscrivons une circonférence dans un triangle sphérique. Soit p le demi-périmètre ; on a de suite, si r est le rayon du cercle inscrit :

$$(1) \quad \operatorname{tg} r = \operatorname{tg} \frac{A}{2} \sin(p-a) = \operatorname{tg} \frac{B}{2} \sin(p-b) = \operatorname{tg} \frac{C}{2} \sin(p-c);$$

un cercle ex-inscrit de rayon r_a donne

$$(2) \quad \operatorname{tg} r_a = \operatorname{tg} \frac{A}{2} \sin p = \operatorname{cotg} \frac{B}{2} \sin(p-c) = \operatorname{cotg} \frac{c}{2} \sin(p-b),$$

d'où

$$\operatorname{tg} r \operatorname{tg} r_a = \operatorname{tg}^2 \frac{A}{2} \sin p \sin(p-a) = \sin(p-b) \sin(p-c).$$

Considérons maintenant le petit cercle circonscrit : si O est son centre,

$$\text{OAB} = \text{OBA} = \gamma, \ \text{OAC} = \text{OCA} = \beta, \quad \text{OBC} = \text{OCB} = \alpha,$$
$$\alpha + \beta = C \quad \alpha + \gamma = B \quad \beta + \gamma = A.$$

Si on pose

$$2(\alpha + \beta + \gamma) = P = A + B + C,$$

on a

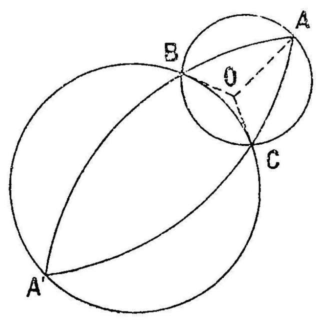

Fig. 1.

$$(3) \quad \operatorname{tg} R = \frac{\operatorname{tg} \frac{a}{2}}{\cos(P-A)} = \frac{\operatorname{tg} \frac{b}{2}}{\cos(P-B)} = \frac{\operatorname{tg} \frac{c}{2}}{\cos(P-C)},$$

et le triangle A′ B C donnerait

$$(4)\qquad \operatorname{tg} R_A = \frac{\operatorname{tg}\frac{a}{2}}{\cos P} = \frac{\operatorname{cotg}\frac{b}{2}}{\cos(P-C)} = \frac{\operatorname{cotg}\frac{c}{2}}{\cos(P-B)},$$

et

$$\operatorname{tg} R \operatorname{tg} R_A = \frac{\operatorname{tg}^2\frac{a}{2}}{\cos P\cos(P-A)} = \frac{1}{\cos(P-B)\cos(P-C)}.$$

On trouve ainsi les formules que M. Redl appelle du demi-angle. J'arrive aux analogues.

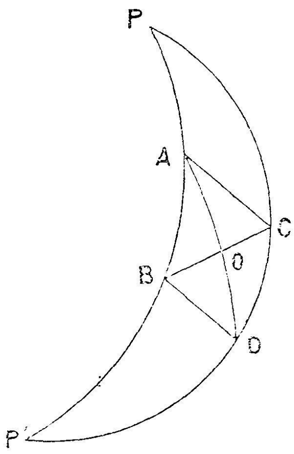

Fig. 2.

1. Soit un triangle ABC; je construis le parallélogramme ABDC, en joignant A au milieu de BC, et prolongeant de OD = OA. ABDC est la projection sur la sphère d'un parallélogramme construit dans le plan tangent en O, et dont le centre serait en O. $OP = OP' = \frac{\pi}{2}$, $PA = P'D$, $PC = P'B$. Les quatre côtés sont égaux deux à deux, ainsi que les angles opposés; mais la somme des dièdres BAC, DCA n'est pas 2 droits, comme dans le plan : quelle relation y a-t-il entre ces angles? Egalons les valeurs du rayon du cercle ex-inscrit à PAC, et tangent à PC,

$$\operatorname{tg}\frac{CAP}{2}\sin\left(\frac{AP+PC+AC}{2}\right) = \operatorname{cotg}\frac{PCA}{2}\sin\left(\frac{AP+PC-AC}{2}\right);$$

mais

$$CAP = \pi - A,\quad PCA = \pi-(B+C),\quad AP+PC = \pi - CD = \pi - C;$$

d'où

$$\operatorname{cotg}\frac{A}{2}\cos\frac{b-c}{2} = \operatorname{tg}\left(\frac{B+C}{2}\right)\cos\frac{c+b}{2},$$

et par application au triangle $\pi - a,\ b,\ \pi - c,\ \pi - A,\ B,\ \pi - C$,

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}\sin\frac{c+b}{2} = \operatorname{cotg}\frac{B-C}{2}\sin\frac{b-c}{2},$$

d'où

$$\operatorname{tg}\frac{b+c}{2}\operatorname{cotg}\frac{b-c}{2} = \operatorname{tg}\frac{B+C}{2}\operatorname{cotg}\frac{B-C}{2}.$$

II. ABC étant toujours le triangle, on prolonge AB, et l'on prend $AC' = \pi - AC$; les angles $AC'C$, ACC' sont supplémentaires et l'on a

$$BC'C + BCC' + CBC' = \pi - C + \pi - B,$$
$$BC'C + BCC' - CBC' = B - C,$$

d'où, par la formule (4) appliquée à $BC'C$,

$$\operatorname{tg}\frac{BC}{2}\cos\frac{B-C}{2} = -\operatorname{cotg}\frac{BC'}{2}\cos\frac{B+C}{2},$$

ou

$$\operatorname{tg}\frac{a}{2}\cos\frac{B-C}{2} = \operatorname{tg}\frac{b+c}{2}\cos\frac{B+C}{2},$$

et, par application au triangle $\pi - a$, b, $\pi - c$, $\pi - A$, B, $\pi - C$

$$\operatorname{cotg}\frac{a}{2}\sin\frac{B+C}{2} = \operatorname{cotg}\frac{b-c}{2}\sin\frac{B-C}{2}.$$

On peut donc établir toutes ces formules en partant du triangle rectangle.

S'il existe un triangle a, b, c, A, B, C, il existe :

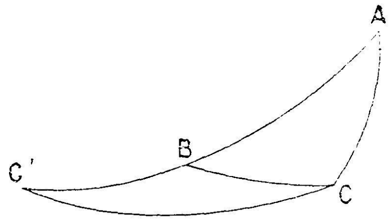

Fig. 3.

1° 1 triangle $\pi - A$, $\pi - B$, $\pi - C$, $\pi - a$, $\pi - b$, $\pi - c$;
2° 3 triangles a, $\pi - b$, $\pi - c$, A, $\pi - B$, $\pi - C$;
3° 3 triangles a, x, $\pi - a - b$, X, $\pi - C$, $\pi - (A + B)$;
4° 3 triangles, a, x, $\pi - (b - c)$, X, $\pi - B$, $\pi - (X - C)$.

A une relation quelconque entre les éléments du premier correspond par 1° et 2° une relation entre le même nombre d'éléments, qui peut être identique à la première; par 3°, 4°, il n'en est plus de même ; une relation du triangle primitif ne se transforme en une autre relation de ses éléments, que si elle ne contient que a, $b + c$, B et C pour 3°, et a, c, B et $C + A$ pour 4°.

Pratiquement, je ne me servais que de 3 relations (1), qui par les transformations 2° donnent les relations (2) ; de (1) et (2) par la transformation 1° on déduit (3) et (4) ; et par les transformations 3° et 4° on déduit les analogies de (2) et (4).

Bien à vous,

A. POTIER.