

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 2 (1900)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: NOUVEAUX MODÈLES CINÉMATIQUES ET INTRODUCTION
NOUVELLE A LA THÉORIE DES COURBES CYCLOIDALES
Autor: Schilling, Fr.
Kapitel: §1. — Les courbes cycloïdales.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-3552>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 24.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

simple à la théorie des cycloïdes. Les exposés ⁽¹⁾ que l'on a publiés jusqu'à ce jour sur cette théorie manquent de clarté, ou sont incomplets sinon même inexacts. C'est à cette circonstance qu'il faut attribuer le fait que dans les milieux des mathématiciens ces notions, en elles-mêmes très simples, ne sont pas aussi connues que l'exigerait leur importance technique dans la construction des engrenages.

§ 1. — LES COURBES CYCLOÏDALES.

Nous appellerons courbes cycloïdales les courbes dues à la génération cinématique suivante :

1. *Si deux côtés adjacents SE_1 et SE_2 d'un parallélogramme articulé $SE_1 ME_2$ tournent autour du sommet S, avec des vitesses angulaires ω et Ω , différentes, mais toutes deux uniformes, le sommet opposé M décrit une courbe cycloïdale (fig. 1).*

Envisageons, dans le plan du parallélogramme ⁽²⁾, la variable complexe $z = x + iy$.

Supposons que dans la position initiale, le parallélogramme soit aplati, de telle sorte que les quatre côtés coïncident avec l'axe des x ; désignons par C et c , les longueurs des côtés SE_1 et SE_2 , par z_1 et z_2 des variables complexes représentant les positions de E_1 et E_2 dans le cours du mouvement, par z une variable correspondant de même au point M, enfin par t un paramètre indé-

⁽¹⁾ Par exemple, ceux de MM. A. VIETOR et Ch. WIENER publiés dans la *Zeitschr. f. Math. u. Phys.* (t. 25, p. 263 et suiv., 1880; t. 26, p. 255 et suiv., 1881) laissent à désirer au point de vue de la simplicité. On trouve des inexactitudes par exemple dans les traités suivants : WEISSENBORN, *Die cyklischen Kurven*, Eisenach, 1856; HATTENDORF, *Analytische Geometrie*, Hannover, 1887, p. 108 et suiv.; KÖNIGS, *Leçons de cinématique*, Paris, 1897, p. 163. Le meilleur exposé est encore celui que l'on trouve dans la courte note publiée en 1874 par M. RITTERSHAUS dans les *Verhandlungen zur Beförderung des Gewerbeleisses in Preussen* (année 53, p. 272); M. BURMESTER l'utilise dans son traité de Cinématique (Leipzig, 1884, p. 134 et suiv.). Toutefois ces auteurs ne font pas l'étude analytique des courbes. Voir aussi GILDERMIISTER, *De lineis curvis epicycloidibus et hypocycloidibus*, Marbourg, 1866, et BELLERMANN, *Epicykloïden und Hypocykloïden*, Iena, 1867.

⁽²⁾ M. MEHMKE a déjà employé des variables complexes pour des recherches analogues, notamment dans son travail : *Ueber die Bewegung eines ebenen starren Systems in seiner Ebene*, *Zeitschr. für Math. u. Physik*, t. 35, p. 1-24. 65-81 (1890).

pendant analogue au temps. Nous avons évidemment les relations :

$$z_1 = Ce^{i\omega t}, \quad z_2 = ce^{i\Omega t},$$

et comme

$$(I) \quad \begin{aligned} z &= z_1 + z_2, \\ &= Ce^{i\omega t} + ce^{i\Omega t}, \end{aligned}$$

qui est l'équation générale la plus simple des courbes cycloïdales⁽¹⁾.

On voit qu'il y a lieu de distinguer deux cas principaux suivant que ω et Ω sont de même signe ou de signes contraires.

Nous supposerons, ce qui ne diminue d'ailleurs en rien la généralité des recherches, dans le premier cas ω et Ω tous deux positifs, dans le second cas ω négatif et Ω positif, dans les deux cas $|\omega| < \Omega$.

Quels que soient les signes de ω et de Ω , l'équation (I) peut prendre les deux formes suivantes :

$$(II) \quad z = (C + ce^{i(\Omega - \omega)t})e^{i\omega t},$$

$$(III) \quad z = (c + Ce^{i(\omega - \Omega)t})e^{i\Omega t}.$$

(1) Si nous partions d'une position quelconque du parallélogramme, l'équation (I) deviendrait, en remplaçant z et t par z' et t'

$$(I') \quad z' = Ce^{i(\omega t' + \alpha)} + ce^{i(\Omega t' + \beta)}$$

où α et β désignent les angles de SE_1 et de SE_2 avec l'axe des x , dans la position initiale. Faisons alors les substitutions :

$$z' = ze^{i\sigma}, \quad t' = t + \tau$$

σ et τ étant deux grandeurs réelles non encore déterminées, l'équation (I') devient :

$$z = Ce^{i(\omega t + \omega\tau + \alpha - \sigma)} + ce^{i(\Omega t + \Omega\tau + \beta - \sigma)}.$$

Cela revient évidemment à faire tourner le système des coordonnées d'un certain angle autour de S , et à compter le paramètre t à partir d'une nouvelle origine.

Pour ramener l'équation (I') à l'équation (I), il suffit de poser :

$$\omega\tau + \alpha - \sigma = 0 \quad \Omega\tau + \beta - \sigma = 0$$

c'est-à-dire

$$\tau = \frac{\alpha - \beta}{\Omega - \omega}, \quad \sigma = \frac{(\Omega + \omega)\tau + \alpha + \beta}{2} = \frac{\alpha\Omega - \beta\omega}{\Omega - \omega},$$

ce qui est toujours possible, sauf dans le cas où $\omega = \Omega$, mais alors le parallélogramme, tourne autour de S comme un système rigide.

Il faut encore remarquer que nous ne restreignons nullement la généralité de la démonstration, en supposant les grandeurs C et c toutes deux positives.

Cherchons à nous représenter la signification géométrique de l'équation (II) pour une valeur donnée t^* du paramètre t .

Afin d'être plus précis, nous nous placerons dans le premier cas (ω et Ω tous deux positifs); les résultats seraient d'ailleurs absolument les mêmes dans le second cas. Nous remarquerons d'abord qu'il nous suffit de ne conserver du parallélogramme que les côtés SE_1 et E_1M (fig. 1). Pour représenter la parenthèse

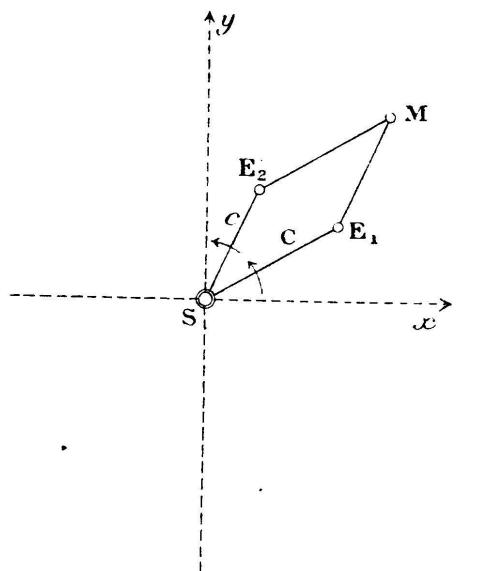


Fig. 1.

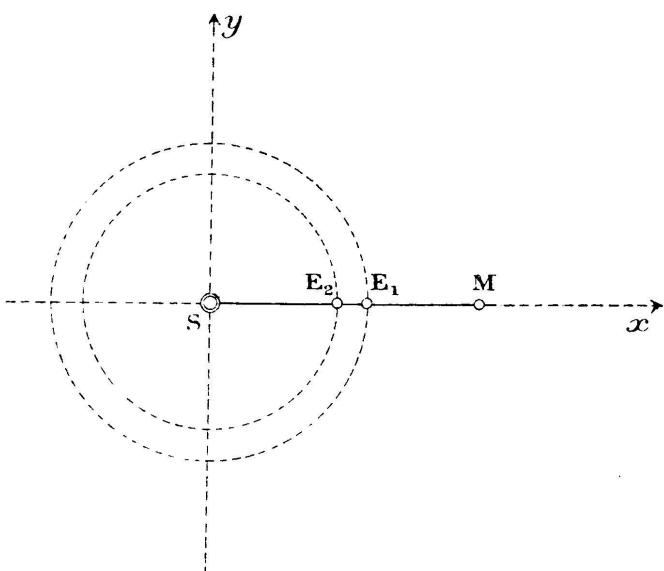


Fig. 2.

qui figure dans le second membre, portons à partir de l'origine sur l'axe des x , la longueur C en SE_1 (fig. 3), puis à partir de E_1 , une droite de longueur c , faisant avec l'axe des x un angle $(\Omega - \omega) t^*$, en $E_1 \bar{M}$; le point \bar{M} est alors l'image de la quantité complexe $C + ce^{i(\Omega - \omega) t^*}$. Si à présent nous faisons tourner tout d'une pièce la figure $SE_1 \bar{M}$, d'un angle ωt^* autour de S , elle viendra en $SE_1^* M^*$ et le point M^* sera l'image du second membre complet $(C + ce^{i(\Omega - \omega) t^*}) e^{i\omega t^*}$.

En d'autres termes l'équation II exprime que le point M est soumis à chaque instant à deux rotations; l'une autour de la position momentanée du point E_1 , avec une vitesse angulaire $(\Omega - \omega)$, l'autre (à laquelle E_1 est également soumis) autour du point S , avec une vitesse angulaire ω (¹).

(¹) Ce mouvement est tout à fait analogue à celui de la lune qui tourne autour de la terre et en même temps que celle-ci, autour du soleil. Nous avons d'ailleurs choisi une partie de la notation afin de faire ressortir cette analogie.

Nous sommes ainsi amenés à une deuxième génération cinématique des courbes cycloïdales.

2. *Une courbe cycloïdale est engendrée par un point M d'un système mobile, qui tourne d'une vitesse uniforme autour d'un point E₁, tandis que ce dernier tourne lui-même, également d'une vitesse uniforme autour d'un point fixe S.*

Cette seconde sorte de génération présente, il est vrai, l'incon-

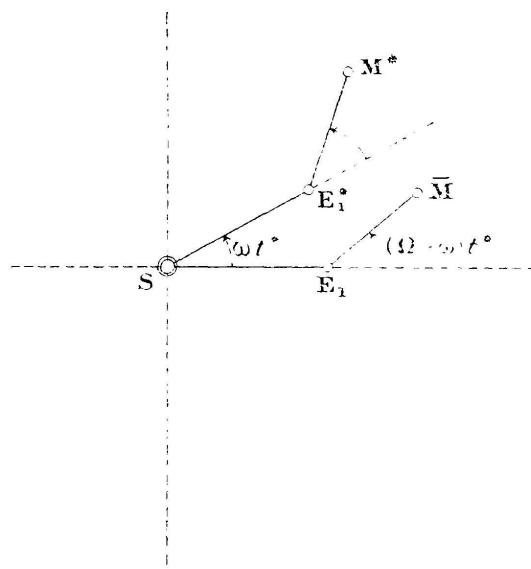


Fig. 3.

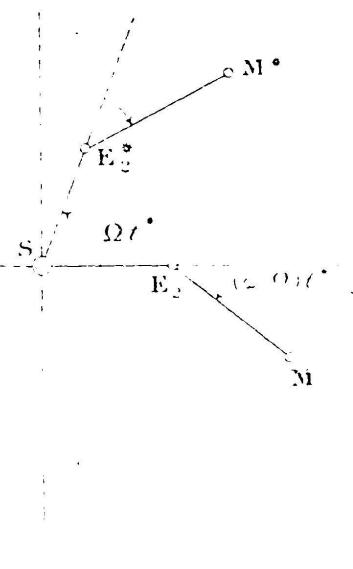


Fig. 4.

vénient de produire la même courbe de deux façons différentes.

Nous pourrions en effet chercher la signification de l'équation III, c'est-à-dire considérer la partie SE₂M du parallélogramme (fig. 4). Nous obtiendrons alors la même courbe que précédemment en donnant à M une vitesse négative cette fois, $\omega - \Omega$, autour de E₂, pendant que E₂ tourne lui-même autour de S d'une vitesse constante Ω .

Or, les théorèmes de Cinématique nous permettent, dans le cas de la figure 3, de remplacer pour un instant les deux vitesses angulaires simultanées de M :

$(\Omega - \omega)$ de centre E₁, et ω de centre S, par une seule vitesse angulaire $(\Omega - \omega) + \omega = \Omega$ autour du point P₁, qui partage la ligne SE₁ dans le rapport inverse des vitesses angulaires (fig. 5) de sorte que :

$$\frac{E_1 P_1}{P_1 S} = \frac{\omega}{\Omega - \omega},$$

que l'on peut écrire en posant $E_1 P_1 = b$ et $P_1 S = a$

$$(IV) \quad \frac{b}{a} = \frac{\omega}{\Omega - \omega}.$$

Les lieux géométriques du pôle ou centre instantané P_1 , dans le plan fixe et dans le plan mobile (fixé à $E_1 M$), c'est-à-dire les trajectoires polaires, sont évidemment deux cercles tangents

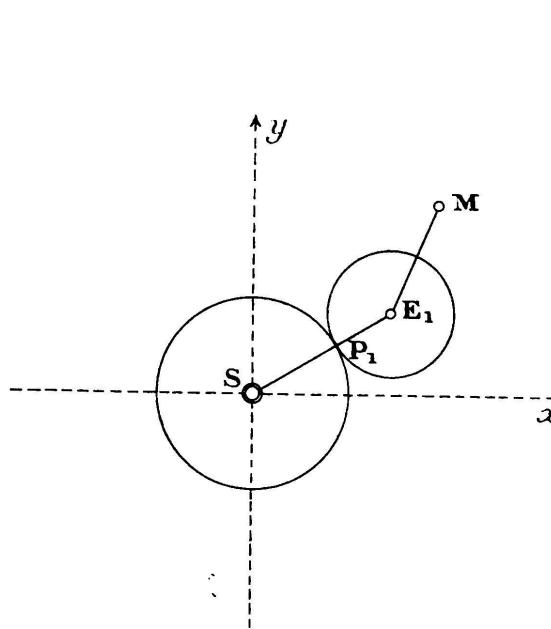


Fig. 5.

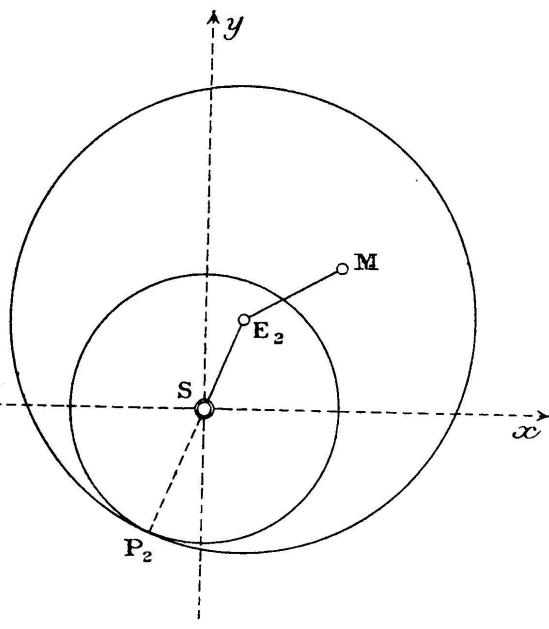


Fig. 6.

extérieurement de centres S et E_1 et de rayons a et b (fig. 5). Cela nous donne une troisième génération cinématique des courbes cycloïdales, qui est d'ailleurs la plus connue.

3. *Une courbe cycloïdale est la courbe décrite par un point M invariablement lié à un cercle qui roule sur un cercle fixe.*

Nous pourrions faire un raisonnement analogue pour le cas de la figure 4. Le pôle P_2 , qui est alors situé sur le prolongement de SE_2 au delà de S est donné par l'équation

$$\frac{E_2 P_2}{P_2 S} = \frac{\Omega}{\omega - \Omega},$$

ou en désignant par A et B les valeurs absolues des longueurs $P_2 S$ et $E_2 P_2$

$$(V) \quad \frac{B}{A} = \frac{\Omega}{\Omega - \omega}.$$

Les cercles polaires sont alors tangents intérieurement.
Nous pouvons donc dire que :

4. Toute courbe cycloïdale du premier type peut être engendrée, soit par deux cercles tangents extérieurement et roulant l'un sur l'autre, soit par le roulement de deux cercles tangents intérieurement; dans ce dernier cas, le grand cercle doit toujours rouler sur le petit.

En soustrayant les équations IV et V, on a :

$$(VI) \quad \frac{B}{A} - \frac{b}{a} = 1.$$

On voit en outre, par la simple inspection des figures, que :

$$(VII) \quad b + a = C,$$

$$(VIII) \quad B - A = c,$$

c'est-à-dire :

5. La distance du point décrivant au centre du cercle mobile, de l'un des couples de cercles, est égale à la distance des centres de l'autre couple.

Les équations (VI), (VII) et (VIII) déterminent sans ambiguïté A, B, C si l'on connaît a, b, c et vice versa.

Enfin l'équation (VI) a la signification géométrique suivante :

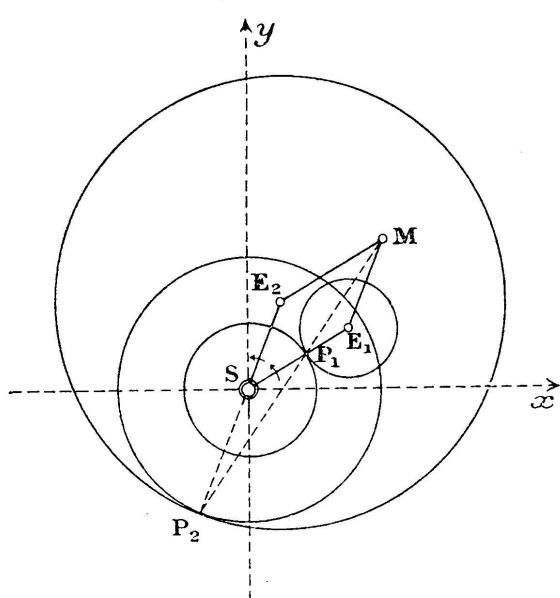


Fig. 7.

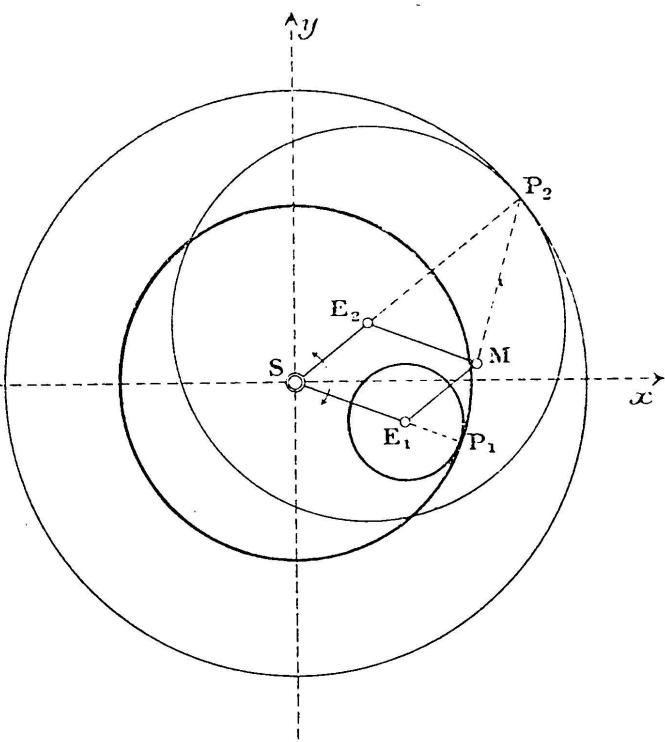


Fig. 7*.

6. Si l'on réunit les figures 5 et 6 construites pour le même instant t^* en une seule de façon à rétablir le parallélogramme primitif, les points P₁, P₂ et M sont en ligne droite (fig. 7).

Ce théorème permet de construire graphiquement A, B, C, quand on connaît a , b , c et inversement.

Pour le second cas ($\omega < 0$, $\Omega > 0$, $|\omega| < \Omega$) nous nous contenterons des remarques suivantes :

4*. *Toute courbe cycloïdale du second type peut être engendrée par deux couples de cercles tangents intérieurement, dans les deux cas le petit cercle roulant sur le grand.*

Les formules correspondant aux formules (IV) à (VIII) sont alors les suivantes, où a , b et A, B désignent toujours les valeurs absolues des rayons SP_1 , $P_1 E_1$ et SP_2 , $P_2 E_2$

$$(IV^*) \quad \frac{b}{a} = -\frac{\omega}{\Omega - \omega}, \quad (V^*) \quad \frac{B}{A} = \frac{\Omega}{\Omega - \omega},$$

$$(VI^*) \quad \frac{B}{A} + \frac{b}{a} = 1,$$

$$(VII^*) \quad a - b = C, \quad (VIII^*) \quad A - B = c.$$

Les théorèmes 5 et 6 s'appliquent ici sans aucune modification ⁽¹⁾.

L'équation (VI^{*}) nous montre que si l'un des rapports des rayons est égal à $\frac{1}{2}$, l'autre l'est aussi ; dans ce cas, $\omega = -\Omega$, à cause des équations (IV^{*}) et (V^{*}), et l'équation primitive devient :

$$(IX) \quad z = Ce^{-i\Omega t} + ce^{i\Omega t}$$

qui peut s'écrire en égalant respectivement les portions réelles et les portions imaginaires :

$$(X) \quad \begin{aligned} x &= (c + C) \cos \Omega t, \\ y &= (c - C) \sin \Omega t, \end{aligned}$$

et si l'on fait abstraction du cas où $C = c$, on déduit de là

$$\frac{x^2}{(c + C)^2} + \frac{y^2}{(c - C)^2} = 1$$

donc :

7. *Dans le cas particulier où $\omega = -\Omega$: si $c = C$ le point M*

(1) Soit par exemple : C et $\frac{\omega}{\Omega}$, constants, mais c variable, l'équation (I) représente par un choix convenable de c toute courbe cycloïdale qui peut être engendrée par le roulement d'un certain couple de cercles.

décrit un segment de l'axe des x ; si $c \geq C$ le point M décrit une ellipse dont les axes sont parallèles aux axes coordonnés et ont pour valeurs $2(c + C)$ et $2|c - C|$.

La même équation (VI*) nous permet encore de différencier les deux couples de cercles :

8. *Si, dans les courbes du second type, le rapport des rayons d'un couple de cercles est $> \frac{1}{2}$, le rapport des rayons de l'autre couple est $< \frac{1}{2}$.*

En nous basant sur les remarques précédentes, nous proposerons les dénominations suivantes pour les divers types de courbes cycloïdales :

9. *Nous appellerons « Epitrochoïdes » les courbes cycloïdales du premier type $\left(\frac{\omega}{\Omega} > 0\right)$, et « Hypotrochoïdes » celles du second $\left(\frac{\omega}{\Omega} < 0\right)$.*

Le dernier théorème nous fournit un moyen d'indiquer par quel couple de cercles la trochoïde a été engendrée.

10. *On pourra appeler « Epitrochoïde à centre libre » ou « Epitrochoïde à centre couvert », la même épitrochoïde suivant que le cercle roulant regardé comme un disque plein laisse voir ou couvre le centre du cercle fixe; de même l'hypotrochoïde sera dite « Hypotrochoïde à centre libre » ou « Hypotrochoïde à centre couvert ».*

Nous donnerons enfin les définitions suivantes, qui supposent seulement $|\omega| < |\Omega|$.

11. *Dans le premier comme dans le second cas, nous dirons que la courbe est une épi- ou hypotrochoïde allongée, raccourcie ou ordinaire⁽¹⁾ selon que le rapport $\frac{c}{C}$ est $>$, $<$ ou $= \left| \frac{\omega}{\Omega} \right|$ ⁽²⁾.*

(¹) J'ai employé les termes usités dans les ouvrages français, bien qu'ils ne correspondent nullement aux termes allemands : *verschlungene* (entrelacée), *gestreckte* (étirée), *gespitzte* (à rebroussements). On remarquera aussi que le terme épicycloïde est employé ici dans un sens beaucoup plus restreint que dans les ouvrages français.

Note du trad.

(²) Si $\frac{c}{C} = \left| \frac{\omega}{\Omega} \right|$, les cercles fixes des deux couples coïncident.

Nous nommerons aussi pour abréger, épi- ou hypocycloïde (à centre libre ou couvert), l'épi- ou hypotrochoïde ordinaire.

J'ajouterais encore, à l'appui de ce qui précède, les définitions géométriques données par M. Chr. WIENER, dans le travail cité plus haut (p. 32).

11*. *Si le point décrivant M et le centre du cercle fixe sont tous deux intérieurs ou tous deux extérieurs au cercle mobile nous avons une trochoïde allongée.*

Si le point décrivant M est intérieur et le centre du cercle fixe extérieur au cercle mobile ou vice versa, nous avons une trochoïde raccourcie.

Si enfin le point décrivant M est sur le cercle mobile (le centre du cercle fixe pouvant d'ailleurs être à l'extérieur, ou à l'intérieur) nous avons une trochoïde ordinaire.

J'indique en terminant, les équations des trochoïdes en coordonnées rectangulaires x, y ; égalant les portions réelles et les portions imaginaires de l'équation (I) on a :

$$(XI) \quad \begin{aligned} x &= C \cos \omega t + c \cos \Omega t, \\ y &= C \sin \omega t + c \sin \Omega t. \end{aligned}$$

On peut transformer ces équations, de manière que l'on puisse reconnaître de suite la génération de la trochoïde. Soit par exemple une épitrochoïde à centre libre. Introduisons à la place de t le paramètre λ (donné par $\lambda = \omega t$) qui désigne l'angle dont l'axe central SE_1 du couple de cercles a tourné autour de S ,

En effet, dans le premier cas, par exemple, on déduit des équations

$$(VII \text{ et VIII}) \quad \frac{B - A}{b + a} = \frac{c}{C} = \frac{\omega}{\Omega}$$

ou en vertu des équations (IV et V) :

$$\frac{A}{a} \cdot \frac{\frac{\Omega}{\Omega - \omega} - 1}{\frac{\omega}{\Omega - \omega} + 1} = \frac{\omega}{\Omega}$$

c'est-à-dire

$$\frac{A}{a} = 1.$$

La démonstration est analogue pour le second cas.

et éliminons les grandeurs $\frac{\omega}{\Omega}$ et C à l'aide des équations (IV) et (VII).

$$(XI\ a) \quad x = (a+b) \cos \lambda + c \cos \frac{a+b}{b} \lambda,$$

$$y = (a+b) \sin \lambda + c \sin \frac{a+b}{b} \lambda.$$

Nous aurons de même pour une épitrochoïde à centre couvert

$$(XI\ b) \quad x = C \cos \frac{B-A}{B} \Lambda + (B-A) \cos \Lambda,$$

$$y = C \sin \frac{B-A}{B} \Lambda + (B-A) \sin \Lambda,$$

où

$$\Lambda = \Omega t.$$

Enfin pour l'hypotrochoïde, nous aurons l'un des deux groupes

$$(XI\ c) \quad x = (a-b) \cos \lambda + c \cos \frac{b-a}{b} \lambda,$$

$$y = (a-b) \sin \lambda + c \sin \frac{b-a}{b} \lambda,$$

dans lequel

$$\lambda = \omega t,$$

ou

$$x = C \cos \frac{B-A}{B} \Lambda + (A-B) \cos \Lambda,$$

$$y = C \sin \frac{B-A}{B} \Lambda + (A-B) \sin \Lambda,$$

dans lequel

$$\Lambda = \Omega t.$$

Ces équations peuvent être utilisées pour l'étude de courbes particulières; mais elles sont évidemment moins simples et moins générales que les équations (I) et (XI).

§ 2. — DESCRIPTION DES MODÈLES

Ces modèles se partagent en quatre groupes que nous allons successivement examiner.

Les *quatre modèles du premier groupe* montrent les doubles générations des épitrochoïdes et hypotrochoïdes (mod. 1-4).