

Zeitschrift:	L'Enseignement Mathématique
Herausgeber:	Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band:	1 (1899)
Heft:	1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE
 Artikel:	 CLASSIFICATION DES LIGNES ET SURFACES DU SECOND ORDRE
Autor:	Poussart, A.
DOI:	https://doi.org/10.5169/seals-1236

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 21.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

CLASSIFICATION
DES
LIGNES ET SURFACES DU SECOND ORDRE

M. Méray, l'éminent professeur de la Faculté des Sciences de Dijon, a donné, dans les *Nouvelles Annales des Mathématiques* (3^e série, tome XI, novembre 1892) une classification des lignes et surfaces du second ordre basée sur la présence des *points doubles*.

Cette classification ne paraît pas avoir attiré l'attention comme elle le mérite; je me propose de montrer les avantages qu'elle présente au point de vue de la spéculation pure et de l'enseignement, que celui-ci s'adresse à de futurs mathématiciens ou à des élèves ingénieurs.

La théorie des lignes et surfaces du second ordre est arrivée à un assez haut degré de perfection pour qu'il soit permis de chercher à déterminer les propriétés fondamentales qui peuvent servir à établir une classification naturelle.

Pour atteindre ce but, nous devrons tenir compte à la fois des caractères algébriques de l'équation, de la forme de la ligne ou de la surface, de ses propriétés géométriques et peser, pour ainsi dire, l'importance de chacun de ces caractères.

Tout d'abord, si on réfléchit à l'état actuel de la Géométrie analytique, on est conduit à conclure que le caractère algébrique doit l'emporter sur les autres. L'Algèbre fortement constituée, grâce à ses procédés de généralisation, a imposé peu à peu à la Géométrie son langage, ses conventions.

La Géométrie fournit les idées premières, les définitions, l'Algèbre les précise pour qu'on puisse leur appliquer le calcul et elle leur donne la généralité qu'elle possède elle-même; les exceptions, les cas particuliers disparaissent.

Il paraît donc naturel de chercher dans les propriétés de l'équation un caractère fournissant une base assez large pour

supporter toute la classification. Du reste les lignes et surfaces étant définies par leurs équations, il est certain que c'est des propriétés de la forme algébrique que doivent découler toutes les propriétés des figures correspondantes. Si donc nous trouvons une concordance absolue entre les caractères algébriques et géométriques des lignes ou surfaces appartenant à un même groupe, si les caractères des différents groupes sont distincts, nous aurons la meilleure preuve que notre classification est naturelle.

Examinons d'abord les classifications adoptées. Pendant un certain temps on a classé les lignes et surfaces du second ordre d'après les propriétés du *centre*. Cette classification est primitive, artificielle ; le centre n'a qu'une importance secondaire dans les lignes du second ordre et il n'en a plus aucune pour les lignes d'ordre plus élevé qui n'ont pas de centre en général.

Insuffisante, cette classification repose de plus sur une confusion regrettable ; le centre d'une ellipse ne joue pas le même rôle que le point d'intersection de deux droites ; le premier est exclusivement un centre, le second est avant tout un *point double* qui a une influence primordiale sur les propriétés algébriques et géométriques. Quelle note donnerait-on à un élève confondant un centre et un point double dans une cubique ? Les mêmes réflexions s'appliquent aux surfaces.

Actuellement on classe les coniques en résolvant l'équation générale et en construisant les différentes lignes qu'elle peut représenter ; cette étude qui repose sur les propriétés du trinôme est excellente et sert de modèle pour la construction des courbes d'ordre supérieur.

Elle fournit des caractères propres à distinguer les différentes lignes du second ordre, mais on a tort d'en déduire une classification sans s'être assuré que ces caractères distinctifs sont suffisants pour définir des familles naturelles. Le caractère fondamental est tiré de la nature de Δ_2 ; on range dans un même groupe les lignes qui peuvent être homothétiques ; on subdivise ensuite chaque groupe d'après la nature de Δ_3 , mais sans donner la véritable signification géométrique de ce second caractère.

Nous montrerons que le caractère primordial doit être tiré de Δ_3 et non de Δ_2 .

REMARQUE. — (Je désigne par Δ_2 , Δ_3 , Δ_4 les discriminants des formes à deux, trois et quatre variables; cette notation me paraît bien préférable à celle en usage d , Δ , H .)

Depuis quelques années, dans tous les cours, on classe aussi les coniques d'après la décomposition en carrés, mais on la fait de telle façon que la nouvelle méthode se réduit à la résolution légèrement déguisée de l'équation.

Au lieu de décomposer naturellement la forme complète rendue homogène, on s'occupe d'abord exclusivement des termes du second degré; on constate avec satisfaction qu'on retrouve la classification déjà établie et plus tard on exalte encore la perfection de celle-ci en montrant qu'elle concorde avec la théorie des centres.

Ce résultat est forcé; on a dénaturé la décomposition en carrés pour retrouver l'ancienne classification des centres.

Les élèves ne sont généralement pas aussi satisfaits; ils ne comprennent pas qu'on réunisse dans un même groupe l'hyperbole et deux droites qui se coupent, et tous disent qu'il y a pour eux deux sortes de lignes du second ordre: les vraies courbes et les systèmes de droites.

Nous ajouterons que la terminologie est mauvaise; on place dans un même *genre*, genre ellipse, par exemple, l'ellipse qui n'a pas de point double et un couple de deux droites qui en a un.

Que doit penser un élève à qui l'on définit le *genre* d'une courbe?

CLASSIFICATION NATURELLE DES LIGNES DU SECOND ORDRE. — Nous devons d'abord chercher le caractère *algébrique* fondamental des formes quadratiques.

Toutes les propriétés de ces formes résultent des deux théorèmes suivants:

I. Toute forme quadratique à n variables est décomposable en une somme algébrique de n carrés ou de moins de n carrés indépendants.

$$\text{II. } xf'_{x0} + yf'_{y0} + zf'_{z0} = x_0f'_x + y_0f'_y + z_0f'_z.$$

Le premier théorème conduit immédiatement à distinguer trois familles.

Première famille	$\Delta_3 \geqslant 0$	3 carrés,
Deuxième famille	$\Delta_3 = 0$	2 carrés,
Troisième famille	$\Delta_3 = 0$	1 carré.
	Mineurs du premier ordre nuls.	

La nature de Δ_3 fournit une classification algébrique, simple et précise. Ce caractère a-t-il une signification géométrique importante ? Réunit-il dans une même famille des figures ayant les mêmes propriétés ?

Dire que $\Delta_3 = 0$, c'est dire qu'il existe un système de valeurs d' x , y , z , non toutes nulles, vérifiant à la fois les équations

$$f'_x = 0 \quad f'_y = 0 \quad f'_z = 0$$

C'est donc dire qu'il y a un point double à distance finie ou infinie.

Première famille	3 carrés	Pas de point double,
Deuxième famille	2 carrés	Un point double,
Troisième famille	1 carré	Une ligne de points doubles.

La considération des points doubles fait rentrer la classification des coniques dans celle des courbes en général, puisqu'elle est basée comme elle sur le nombre des points doubles, sur le *genre*.

Montrons que la décomposition en carrés a autant d'importance au point de vue géométrique qu'au point de vue algébrique.

Les théories des tangentes, des centres, des diamètres, des axes, des foyers sont les conséquences d'une théorie unique, celle des *polaires*.

Cette théorie domine toutes les autres, elle les comprend toutes ; c'est donc elle qui doit fournir, au point de vue géométrique, le caractère fondamental pour la classification.

Or la décomposition en carrés entraîne l'existence des triangles conjugués, les propriétés des polaires, des droites conjuguées, des diamètres, des axes, des foyers, c'est-à-dire toutes les propriétés des coniques.

Il nous reste à prouver que tous les coniques d'une famille ont un ensemble de propriétés bien définies, que ces propriétés varient d'une famille à l'autre.

Première famille. — Chaque point a une polaire unique, chaque droite a un pôle unique, chaque point de la courbe a une tangente unique. La droite de l'infini a un pôle unique, le centre. Chaque point de l'infini a une polaire unique, c'est-à-dire qu'à toute direction de corde correspond un diamètre.

D'un point quelconque on peut mener deux tangentes. Chaque courbe a quatre foyers.

Deuxième famille. — La présence d'un point double modifie profondément les propriétés des polaires.

La polaire du point double est indéterminée.

La polaire d'un point quelconque passe par le point double.

Tous les points d'une droite passant par le point double ont même polaire.

Les mêmes théorèmes s'appliquent aux diamètres, aux tangentes.

Troisième famille. — Les mêmes théorèmes s'appliquent à chaque point de la ligne des points doubles.

REMARQUE. — La décomposition en carrés de l'ensemble de la forme est la seule classification intéressante en coordonnées trilinéaires et tangentielles.

Enfin cette classification convient également aux coniques à coefficients imaginaires.

Pour terminer la classification, on subdivisera les familles en espèces, d'après la nature des termes du second degré.

Première famille $\left\{ \begin{array}{l} \Delta_2 < 0 \text{ Hyperbole} \\ \Delta_2 = 0 \text{ Parabole} \\ \Delta_2 > 0 \text{ Espèce elliptique} \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} A\Delta_3 < 0 \text{ Ellipse réelle,} \\ A\Delta_3 > 0 \text{ Ellipse imaginaire.} \end{array} \right.$

Deuxième famille $\left\{ \begin{array}{l} \Delta_2 < 0 \text{ Couple hyperbolique,} \\ \Delta_2 = 0 \text{ Couple parabolique réel ou imaginaire,} \\ 1 \text{ point double.} \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \Delta_2 > 0 \text{ Couple elliptique.} \end{array} \right.$

Troisième famille
 $\Delta_3 = 0$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{Mineurs} \\ \text{premier ordre nuls.} \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \text{Droite double.} \end{array} \right.$

CLASSIFICATION DES SURFACES DU SECOND ORDRE. — On peut essayer de défendre la classification actuelle des coniques, en disant que dans chaque groupe on trouve des figures qui peuvent être homothétiques.

Celle des surfaces présente le plus grand désordre et il n'y a aucun argument à fournir en sa faveur, autre que l'habitude.

On trouve placés dans des groupes différents les cônes et les cylindres qui ont la même définition; on ne peut invoquer l'homothétie, car le cylindre elliptique et le paraboloïde elliptique ne sont pas dans la même classe, tandis que les deux paraboloïdes sont réunis; la décomposition en carrés est également méconnue; le cône qui correspond à trois carrés est avec les surfaces qui en ont quatre.

Appliquons radicalement la décomposition en carrés, et nous retrouverons la simplicité, l'unité déjà observées dans la classification des coniques.

Première famille	$\Delta_4 \geq 0$	$\Delta_3 \geq 0$ Espèce hyperbolique $AA' - B''^2 < 0$	{ Hyperboloïde à 1 nappe. Hyperboloïde à 2 nappes.
		$\Delta_3 = 0$ Espèce parabolique	{ Paraboloïde hyperbolique. Paraboloïde elliptique.
Pas de point double			
4 carrés.		$A\Delta_3 > 0$ Espèce elliptique $AA' - B''^2 > 0$	{ Ellipsoïde réel. Ellipsoïde imaginaire.
		$A\Delta_3 < 0$	Cône réel.
Deuxième famille	$\Delta_4 = 0$	$A\Delta_3 > 0$	Cône imaginaire.
		$\Delta_3 = 0$	{ Cylindre hyperbolique. Cylindre elliptique réel. Cylindre elliptique imaginaire.
1 point double		$\Delta_3 = 0$	
3 carrés.		Mineurs du premier ordre nuls.	Cylindre parabolique.
Troisième famille			Couple hyperbolique de plans.
Ligne de points doubles.			{ Couple parabolique réel. Couple parabolique imaginaire. Couple elliptique.
Quatrième famille.	Plan double.		

On est frappé par la simplicité de cette classification; l'étude des plans polaires vaachever de prouver combien elle est naturelle.

De plus, la considération des points doubles fait comprendre la cause des singularités que présentent les plans diamétraux dans les cylindres et les couples de plans ; leur présence permet de prévoir ce qui doit arriver et, au lieu d'une série de faits détachés que l'élève retient avec peine, on n'a plus qu'une suite de conséquences fort simples d'un fait unique.

Première famille. — *Chaque point a un plan polaire unique ; chaque plan a un pôle unique.* Il en résulte que chaque point de la surface à distance finie ou infinie a un plan tangent ; toute direction de corde a un plan diamétral ; le plan de l'infini a un pôle unique qui est le centre.

A toute droite correspond une droite conjuguée. A toute droite à l'infini Δ correspond une droite conjuguée unique qui est le diamètre conjugué des plans parallèles passant par Δ .

Deuxième famille. — Le plan polaire du point double est indéterminé.

Le plan polaire d'un point quelconque passe par le point double.

Si des points sont en ligne droite avec le point double, ils ont même plan polaire ; — en particulier le plan tangent est tangent en tous les points de la génératrice.

Ces propriétés appartiennent aux cylindres qui ont leur point double à l'infini ; il en résulte que :

le plan diamétral conjugué de la direction des génératrices, c'est-à-dire le plan polaire du point double est indéterminé ;

si deux directions de cordes déterminent un plan parallèle à la direction des génératrices, elles ont même plan diamétral.

En effet, les points à l'infini de ces deux directions sont en ligne droite avec le point double ; donc ils ont même plan polaire.

Troisième famille. — L'intersection des deux plans du couple est une ligne de points doubles et on peut appliquer à chacun d'eux tous les résultats précédents.

Le plan polaire d'un point quelconque de la ligne des points doubles est indéterminé.

Le plan polaire d'un point quelconque passe par la ligne des points doubles.

Quatrième famille. — Le plan polaire d'un point quelconque du plan double est indéterminé.

Le plan polaire d'un point quelconque se confond avec le plan double.

Chasles regardait comme le meilleur critérium d'une méthode le fait qu'elle s'appliquait aussi facilement à la Géométrie plane qu'au problème correspondant de la Géométrie de l'espace ; il est impossible de ne pas reconnaître, qu'à ce point de vue, la nouvelle classification est parfaite.

A. POUSSART (Paris).

UNE PREMIÈRE LEÇON
DE
GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE

On sait quelles difficultés rencontrent les commençants lorsque, après avoir considéré un système de deux plans de projection, ils font le rabattement du plan vertical sur le plan horizontal, rabattement destiné à donner l'épure.

On sait aussi quels inconvénients entraîne la considération, pendant la plus grande partie du cours, d'un système unique de deux plans, l'un horizontal et l'autre vertical : les élèves n'ont pas le temps de se familiariser avec la méthode des changements de plans ; et puis il y a aussi les problèmes insolubles, momentanément, parce que telle droite est de profil, alors le professeur est forcé de dire à ses élèves : vous verrez cela plus tard.

Qu'on le veuille ou non, la considération de plus de deux plans s'impose dès le début, et par conséquent il en est de même pour les changements de plans : on peut donner encore, entre autres raisons, la nécessité où se trouve l'artisan le moins instruit de dessiner un plan et deux élévations pour représenter l'objet le plus simple.

Tout cela a été signalé depuis longtemps. Tout récemment, M. Laisant, dans son très intéressant ouvrage : *La Mathématique*, insiste sur ce fait qu'il ne faut pas « rendre l'élève esclave de deux plans de projection et d'une ligne de terre invariablement tracée ».