SUR LES SIGNES DES DISTANCES EN GÉOMÉTRIE

Autor(en): **Fontené, G.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **1 (1899)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **27.04.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-1235

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

rait la méthode, suivant l'avis d'un congrès international de mathématiciens, soit au milliard, soit à la milliasse pour avoir un système généralement adopté et partout connu, à l'usage des savants qui peuvent avoir besoin de nombres excessivement grands.

Pour ceux que la trop nombreuse synonymie pourrait effrayer, rappelons que chez les Germains la coexistence de milliard et de mille millions n'a eu aucun résultat fâcheux, pas plus que chez les Latins la coexistence de milliard et de billion, mais ce qui est vraiment fâcheux, au point de vue international, c'est le double sens (1) dont est affligé ce dernier mot avec tous ses congénères.

Ch. BERDELLÉ (Rioz, Haute-Saône).

SUR LES SIGNES DES DISTANCES

EN GÉOMÉTRIE

1. J'écris d'abord le tableau suivant, où la lettre G veut dire *Géométrie*, et où les lettres A, α, a, désignent respectivement un point, une droite, un plan.

G. linéaire.	G. plani-conique.	G. axiale.
A_1^1	α_1^1	a_1^1

G. plane.	G. conique.
A_1^2, α_2^1	α_1^2, a_2^1

G. générale.
A_1^3, α_2^2, a_3^1

La Géométrie linéaire est l'étude des points d'une droite σ considérée comme rayon ; la Géométrie plani-conique est l'étude des droites menées dans un plan s par un point S ; la Géométrie

(1) Ce double sens a laissé des traces dans les articles billion, trillion, etc., du *Dictionnaire de mathématiques de l'Encyclopédie*.

axiale est l'étude des plans qui passent par une droite σ considérée comme axe.

La Géométrie plane est l'étude des points et des droites dans un plan s; la Géométrie conique est l'étude des droites et des plans qui passent par un point S.

La Géométrie générale est l'étude des points, des droites, des plans de l'espace.

2. La notation α_2^2 signifie qu'une droite dans l'espace est déterminée par deux points (indice inférieur), par deux plans (indice supérieur) ; les notations A_1^3 et a_3^1 ont un sens analogue. La notation A_1^2 signifie que, en Géométrie plane, un point est déterminé par un point ou par deux droites, etc. Dans chaque Géométrie, la somme des deux indices surpasse d'une unité le nombre des paramètres dont dépend l'*élément décrivant* dans cette Géométrie, ou l'*élément enveloppant* dans cette Géométrie : ainsi, dans l'espace, la somme des deux indices est 4, alors qu'un point ou un plan dépend de trois paramètres. Le produit des deux indices fait connaître le nombre des paramètres dont dépend l'élément : ainsi une droite α_2^2 dépend de quatre paramètres. Dans un espace analytique à n — 1 dimensions, on aurait en Géométrie générale les éléments

$$M_1^{n-1},\quad M_2^{n-2},\ldots,\ M_p^q,\ldots,\ M_q^p,\ldots,\ M_{n-2}^2,\quad M_{n-1}^1,$$

dont le premier est le point, le dernier, qui peut être appelé *trope*, est le rayon, l'avant-dernier peut être appelé le second axe ; on peut dire que les deux éléments M_p^q et M_q^p sont *associables*, et ils sont associés s'ils ont un point commun et par suite un trope commun.

3. Deux éléments associables M_p^q et M_q^p ont un *moment*. Dans l'espace réel, avec l'hypothèse euclidienne, ces moments sont pour les diverses Géométries :

(A,B)	$\sin(\alpha,\beta)$	$\sin(a,b)$
(A,β)	$\sin(\alpha,b)$	
(A,b) (α,β)		

c'est-à-dire : 1° la distance de deux points, le sinus de l'angle de deux droites associées, le sinus d'un dièdre ; 2° la distance d'un point à une droite, le sinus de l'angle d'une droite et d'un plan ; 3° la distance d'un point à un plan, le moment de deux droites quelconques. L'hypothèse euclidienne influe sur les cases à gauche du tableau.

4. Dans un ouvrage publié en 1892, l'*Hyperespace*, j'ai montré que, si l'on désigne par (M_p^q, M_q^p) le moment de deux éléments associables pris dans un certain ordre, on a, avec des conventions presque nécessaires,

$$(1) \qquad (M_p^q)\ (M_q^p) = (-1)^{pq} \times (M_q^p,\ M_p^q),$$

les éléments étant dirigés, l'espace analytique étant orienté ; le moment ne change de signe que si p et q sont impairs tous deux. Je me propose de légitimer cette règle pour l'espace réel ; les seuls moments qui changent de signe quand on change l'ordre des deux éléments sont : la distance de deux points, le sinus de l'angle de deux droites dans un plan, le sinus du dièdre de deux plans, et la distance d'un point et d'un plan.

Les droites sont dirigées, les plans sont orientés par des flèches circulaires, l'espace est orienté comme il suit : on considère une droite et un plan perpendiculaires, on dirige la droite par une flèche f, on oriente le plan par une flèche circulaire φ, et le système (f, φ), que l'on peut tourner à volonté, est dit orienter l'espace ; on pourrait encore employer une flèche hélicoïdale.

5. Il n'y a pas lieu d'insister pour la Géométrie linéaire, ni pour la Géométrie plani-conique ; pour la Géométrie axiale, quand on considère un dièdre (a, b), les plans sont orientés, l'arête est dirigée, et un observateur représenté par la flèche de l'arête suit des yeux le mouvement du plan a quand ce plan *orienté* vient coïncider avec le plan *orienté* b : l'espace étant orienté, le dièdre est connu en grandeur et en signe à $2k\pi$ près. Dans ces trois cas, la règle (1) se vérifie.

6. Je vais montrer que, *avec une définition convenable, nullement arbitraire*, on a par exemple dans l'espace pour la distance des éléments point et plan, c'est-à-dire A_1^3 et A_3^1,

$$(A, b) = -(b, A),$$

le plan étant orienté. Soit (A, b). Partons de A, et prenons un point B dans le plan b ; soit α la droite AB que l'on dirige à volonté : menons par B une droite β dans le plan b, et dirigeons-la à volonté ; soit a le plan des deux droites α et β, plan que l'on oriente à volonté ; nous écrirons par définition

$$(\mathrm{A},b) = \overline{\mathrm{AB}} \times \sin(\alpha,\beta) \times \sin(a,b),$$

le second membre étant indépendant de B et de β, et de la façon dont on dirige ou oriente les éléments introduits. Nous écrirons de même, par définition,

$$(b,\mathrm{A}) = \sin(b,a) \times \sin(\beta,\alpha) \times \overline{\mathrm{BA}},$$

en partant de b, et en introduisant successivement le plan a et la droite α. Le nombre des facteurs étant impair, on a bien la relation écrite au début de ce numéro.

On aurait de même en Géométrie plane ou en Géométrie conique, avec deux facteurs au lieu de trois,

$$(\mathrm{A},\beta) = (\beta,\mathrm{A}), \qquad \sin(\alpha,b) = \sin(b,\alpha),$$

ce qui est conforme à la règle (1).

7. Pour le moment de deux droites, α_2^2 et β_2^2, on doit avoir $(\alpha, \beta) = (\beta, \alpha)$. Or, de quelque façon que l'on veuille définir le signe de ce moment, cela aura lieu en vertu de la remarque suivante : si AB est la perpendiculaire commune aux deux droites, si l'on considère les deux demi-plans qui passent par AB et par les régions positives α et β à partir de A et B, si l'on mène le plan bissecteur, et si, dans ce plan, par le milieu O de AB, on mène Oz perpendiculaire sur AB, cette droite est un axe de symétrie pour les droites *dirigées* α et β, de sorte que le système (α, β) peut être amené en coïncidence avec le système (β, α).

Quant à la définition du signe du moment de deux droites, on peut la déduire, d'une manière analogue à ce qu'on a fait au n° 6, de la formule

$$(\alpha,\beta) = (\alpha,\mathrm{B}) \times \sin(a,\beta),$$

dans laquelle B est un point de β, et a est le plan déterminé par B et α, plan que l'on oriente à volonté. Cette formule, utile pour l'expression du volume d'un tétraèdre en fonction de deux arêtes

opposées..., est un cas particulier du *théorème des quatre éléments* donné dans l'ouvrage cité plus haut.

(La définition du moment de deux droites se rattache à des idées générales qui sont exposées au chapitre VII du même ouvrage ; l'hypothèse euclidienne influe d'ailleurs sur cette définition ; on peut dire que l'on multiplie la distance minimum de deux points pris sur les deux droites par le sinus maximum de l'angle de deux plans passant par les deux droites.)

8. Avec un tétraèdre de référence ABCD, dont les arêtes α, β, γ, α', β', γ' sont dirigées, dont les plans a, b, c, d des faces sont orientés, on a, pour un point M et un plan orienté m,

$$(M,m) = \frac{(A,m)\times(M,a)}{(A,a)} + \ldots + \ldots + \ldots,$$

et pour deux droites

$$(\mu,\nu) = \frac{(\alpha'\nu)\times(\mu,\alpha)}{(\alpha'\alpha)} + \ldots + \ldots + \ldots + \ldots + \ldots;$$

les idées barycentriques donnent la première formule ; on a la seconde en considérant une force F dirigée suivant μ, force que l'on décompose suivant les directions des arêtes du tétraèdre, et en prenant les moments par rapport à ν : les composantes de la force F se déterminent d'ailleurs par le théorème des moments. Si l'on pose

$$\begin{cases} (M,a) = x, \\ (M,b) = y, \\ (M,c) = z, \\ (M,d) = t, \end{cases} \qquad \begin{cases} (A,m) = u, \\ (B,m) = v, \\ (C,m) = w, \\ (D,m) = r, \end{cases} \qquad \begin{cases} (A,a) = h, \\ (B,b) = h', \\ (C,c) = h'', \\ (D,d) = h''', \end{cases}$$

on a

$$(M,m) = \frac{ux}{h} + \frac{vy}{h'} + \frac{wz}{h''} + \frac{rt}{h'''};$$

pour (m,M) on doit changer le signe du second membre. Pour des droites, on pose, en se réglant sur D,

$$\begin{cases} (\mu,\alpha) = \lambda, \\ (\mu,\beta) = \mu, \\ (\mu,\gamma) = \nu, \end{cases} \qquad \begin{cases} (\mu,\alpha') = \rho, \\ (\mu,\beta') = \sigma, \\ (\mu,\gamma') = \tau, \end{cases} \qquad \begin{cases} (\alpha,\alpha') = r_1, \\ (\beta,\beta') = r_1', \\ (\gamma,\gamma') = r_1'', \end{cases}$$

et l'on a

$$(\mu,\mu') = \frac{\lambda\rho'}{r_1} + \frac{\mu\sigma'}{r_1'} + \frac{\nu\tau'}{r_1''} + \frac{\rho\lambda'}{r_1} + \ldots + \ldots$$

L'équation normale d'une droite, $x\cos\alpha + y\cos\beta - p = 0$, et l'équation normale d'un plan, donneraient lieu à des remarques que je laisse de côté.

9. Formons le tableau

Segment.	Angle.	Dièdre.
Triangle.	Trièdre.	
Tétraèdre.		

La première ligne donne les quantités déjà considérées $\overline{AB}$, $\sin(\alpha, \beta)$, $\sin(a, b)$. Pour un triangle, comprenant trois points et trois droites, on a les deux quantités corrélatives $2S$ et $\frac{S}{R}$, S étant la surface et R le rayon du cercle circonscrit ; le signe de R est défini par les formules

$$\frac{\overline{BC}}{\sin(\beta,\gamma)} = \ldots = \ldots = 2R = \frac{2S}{\left(\frac{S}{R}\right)}.$$

Pour un trièdre, on a à considérer le sinus du trièdre, et le sinus du trièdre réciproque. Pour un tétraèdre, on a à considérer le volume sextuplé 6 V, et une quantité corrélative que l'on définirait par des formules analogues aux formules écrites en dernier lieu.

10. Sans vouloir faire ici une revue complète de ces quantités, nous dirons que l'on peut définir l'aire algébrique d'un triangle ABC par les formules

$$2\,\overline{ABC} = \overline{BC} \times (A,\alpha) = \overline{CA} \times (B,\beta) = \overline{AB} \times (C,\gamma),$$

α, β, γ désignant les droites dirigées qui portent les côtés ; on peut écrire, $\overline{A}$ ou $\overline{B}$ ou $\overline{C}$ mis en facteur voulant dire $+1$,

$$2\,\overline{ABC} = \overline{A} \times \overline{BC} \times (A,\alpha) = -B \times \overline{AC} \times (B,\beta) = \ldots,$$

le signe — correspondant au dérangement de la suite BAC. On écrira de même

$$6\,\overline{ABCD} = 2\,\overline{ABC} \times \overline{D} \times (d,D) = \ldots,$$
$$= -\overline{D} \times 2\,\overline{ABC} \times (D,d) = \ldots,$$

le signe — correspondant au dérangement de la suite D A B C, l'ordre des éléments dans la parenthèse étant lié à l'ordre des deux premiers facteurs ; on en déduit facilement

$$6\,\overline{\mathrm{ABCD}} = \overline{\mathrm{AB}} \times \overline{\mathrm{CD}} \times (\gamma, \gamma'),$$

γ et γ' étant les droites dirigées qui portent A B et C D.

11. Les définitions adoptées donnent les conséquences suivantes :

On constate que la distance d'un point A à une droite dirigée β dans un plan orienté est positive lorsqu'une force agissant suivant β dans le sens positif a un moment positif par rapport à A. Pour l'angle d'une droite et d'un plan, on a une règle très simple et très naturelle. Pour un point et un plan, c'est la distance (b, A) qui est positive quand un observateur debout sur le plan du côté de A voit la flèche circulaire du plan tourner de sa droite vers sa gauche, si l'espace est orienté de droite à gauche ; pour deux droites, le moment est positif comme en Mécanique. L'aire d'un triangle, le volume d'un tétraèdre sont positifs dans les conditions généralement admises. Relativement à la façon d'orienter un plan, ou l'espace, il est essentiel, quand on emploie des axes de coordonnées, d'*orienter le plan de* Ox *vers* Oy, *d'orienter l'espace de* Ox *vers* Oy *pour l'observateur* Oz ; si l'on tient à parler de gauche et de droite, il convient alors d'adopter pour l'espace une disposition des axes Ox, Oy, Oz, telle que l'observateur Oz voie les axes Ox, Oy comme on les place d'ordinaire en Géométrie plane : autrement, on est conduit à orienter le plan de Oy vers Ox comme on fait souvent en Mécanique plane, ce qui est fâcheux pour les moments ; l'espace est alors orienté dans le sens astronomique direct, tel qu'on l'oriente pour l'ascension droite et pour la longitude, mais non pour l'azimut et pour l'angle horaire.

G. Fontené (Paris).