

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 1 (1899)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: UN CHAPITRE DE L'HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES
Autor: Beman, W.-W.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-1227>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 27.04.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

premiers principes leur est avant tout indispensable. Mais ce n'est pas une raison pour ne pas cultiver chez eux l'intuition, car ils se feraient une idée fausse de la science s'ils ne la regardaient jamais que d'un seul côté, et d'ailleurs ils ne pourraient développer chez leurs élèves une qualité qu'ils ne posséderaient pas eux-mêmes.

J'ai écrit un bien long article sur une question bien abstraite et bien générale. Pour que le lecteur me le pardonne, je vais énoncer quelques conclusions précises.

En spéciales et dans la première année d'École polytechnique, on ne parlera pas des fonctions sans dérivées, on n'en parlera que pour dire : il peut y en avoir, mais nous ne nous en occuperons pas.

La première fois qu'on parlera aux élèves des intégrales, il faudra les définir par les surfaces, et ce n'est que quand ils auront pris beaucoup d'intégrales qu'on leur donnera la définition rigoureuse.

H. POINCARÉ (Paris).

UN CHAPITRE

DE

L'HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES ⁽¹⁾

Le 10 mars 1897, un siècle après la présentation de l'original, l'Académie royale des sciences et lettres de Danemark a publié une traduction française d'un mémoire de Wessel intitulé : « Om « Direktionens analytiske Betegning et Forsøg, anvendt fornemmeligt til plane og spheriske Polygoners Opløsning » ou, Un essai sur la représentation analytique des directions avec des

(¹) Cette étude si intéressante de M. Beman sur le Mémoire de Wessel a fait l'objet d'une communication au Congrès de l'association américaine pour l'avancement des sciences, à Detroit (1897). Les lecteurs de *l'Enseignement mathématique* prendront connaissance, avec grand intérêt, de la traduction française dont M. Berdellé a bien voulu se charger, à l'intention de notre Recueil.

applications, en particulier à la résolution des polygones plans et sphériques.

Cet écrit, qui traite de la représentation géométrique des quantités imaginaires, qui fut lu plusieurs années avant le fameux essai d'Argand, et qui parle sur ce sujet d'une façon tout à fait exacte, resta enterré dans l'oubli pendant près d'un siècle, jusqu'au moment où il en fut tiré, en 1895, par une thèse de S.-D. Christensen sur le développement des Mathématiques en Danemark et en Norvège pendant le XVIII^e siècle.

En considérant que ce mémoire de Wessel est relativement encore inconnu, j'ai pensé qu'il ne serait pas sans intérêt de composer la présente esquisse sur le développement du traitement géométrique des quantités imaginaires, particulièrement dans la dernière partie du XVIII^e siècle et la première du XIX^e.

Nous trouvons que la racine carrée d'une quantité négative apparaît pour la première fois dans la *Stéréométrie d'Héron* (100 ans avant Jésus-Christ). Après avoir donné une formule correcte pour la détermination d'un tronc de pyramide à base carrée et l'avoir appliquée avec succès au cas où le côté de la base inférieure est 10, celui de la base supérieure 2 et l'arête latérale 9, l'auteur s'efforce de résoudre le problème pour le cas où le côté de la base inférieure est 28, celui de la base supérieure 2 et l'arête latérale 15. Au lieu de la racine carrée de $81 - 144$ indiquée par la formule il met celle de $144 - 81$ et la pose égale à $8 - \frac{1}{16}$, c'est-à-dire il remplace $\sqrt{-1}$ par 1 et ne songe pas à observer que le problème est impossible. Cette méprise est-elle due à Héron ou à l'ignorance d'un copiste, c'est ce qu'on ne saurait déterminer.

Dans la solution du problème : trouver un triangle rectangle dont le périmètre est 12 et l'aire 7. Diophante, dans son *Arithmétique* (300 ans après J.-C.) résout l'équation $336x^2 + 24 = 172x$ et dit que l'équation ne peut être résolue à moins d'admettre que la moitié du coefficient de x diminué du produit par 24 du coefficient de x^2 , puisse être un carré. Mais on ne fait pas remarquer que la valeur de x dans cette équation renferme le carré d'une quantité négative.

Bhaskara, né l'année du Seigneur 1114, dans son chapitre Vija

Ganita eut l'habileté de faire faire un pas à la question. Il y donne cette règle :

« Le carré d'un nombre positif, et de même celui d'un nombre
« négatif, est positif, et la racine d'un nombre positif a deux
« valeurs, une positive et une négative. Il n'y a pas de racine
« d'un nombre négatif, et un tel nombre ne peut être un
« carré. »

Le premier mathématicien qui a eu le courage de se servir effectivement dans le calcul de la racine carrée d'un nombre négatif fut Cardan. A une époque antérieure il avait déclaré que de pareilles quantités étaient tout à fait impossibles, mais dans son *Ars Magna*, 1545, il discuta le problème : partager 10 en deux parties dont le produit doit être 40, et il obtint les deux valeurs $5 + \sqrt{-15}$ et $5 - \sqrt{-15}$. Il les vérifia par la multiplication, mais il appela de pareilles quantités sophistiquées, attendu qu'on ne peut admettre de calculer avec ces nombres comme avec des nombres purement négatifs ou d'autres, ni de leur attribuer une signification.

Bombelli, dans son *Algèbre*, 1572, donne nombre de règles sur l'usage de quantités telles que $a + b\sqrt{-1}$, mais sans faire le moindre effort pour éclaircir leur nature.

Girard sait que chaque équation a un nombre de racines égal à son degré, par conséquent il reconnaît l'existence de racines imaginaires. Dans son *Invention nouvelle en l'Algèbre*, 1629, en discutant les racines de l'équation $x^2 - 4x + 3 = 0$, il demande quelle pouvait être l'utilité de racines telles que $-1 + \sqrt{-2}$ et $-1 - \sqrt{-2}$; il répond qu'elles montrent la généralité de la loi de formation des coefficients, et qu'elles sont utiles pour cela même.

Descartes, dans sa *Géométrie*, 1637, n'émet pas d'idées neuves à ce sujet, mais il est le premier à appliquer les termes de réel et d'imaginaire pour marquer la différence entre les racines d'une équation.

Wallis, dans son *Traité d'Algèbre*, 1685, mena l'avant-garde dans les efforts faits pour interpréter géométriquement les racines carrées des nombres négatifs. Dans son chapitre LXVI, il dit :

« Ces quantités imaginaires, comme on les appelle communé-
« ment, provenant de la racine supposée d'un carré négatif (si

« toutefois il y en a) sont réputées nous montrer quand le cas est
« impossible.

« Et il en est en effet ainsi d'après la notion première et stricte
« de ce qui nous est proposé. Car il n'est pas possible qu'un
« nombre (positif ou négatif) multiplié par lui-même puisse pro-
« duire par exemple -4 . Le même signe, que ce soit $+$ ou $-$,
« ne peut produire que $+$, et par conséquent pas -4 .

« Mais il est aussi impossible qu'une quantité, même sans
« supposer que ce soit un carré, puisse être négative. Car il
« n'est pas possible qu'une grandeur soit plus petite que rien,
« qu'un nombre soit moindre que zéro.

« Et pourtant cette supposition (de quantités négatives) n'est
« pas tout à fait aussi inutile ou absurde, si elle est bien com-
« prise. Et bien que la simple notation algébrique signifie une
« quantité plus petite que rien, pourtant quand elle sert à une
« application physique elle indique une quantité aussi réelle que
« celle qui aurait le signe $+$, mais devra être interprétée dans
« un sens opposé. »

Il éclaircit cela au moyen de distances mesurées en avançant
ou en reculant sur la ligne droite d'un chemin ordinaire, puis
il dit :

« Maintenant ce qui est admis pour les lignes, doit, par la
« même raison, l'être pour les plans. »

Ayant de la sorte justifié l'existence de plans négatifs, il con-
tinue ainsi :

« Mais maintenant (en supposant cette surface plane négative
« de -1600 perches en forme de carré) ne faut-il pas que ce
« carré supposé ait un côté ? Et s'il en est ainsi, quel est ce
« côté ?

« On ne peut dire ni que c'est $+40$, ni que c'est -40 . Mais
on peut plutôt dire que c'est $\sqrt{-1600}$, ou $10\sqrt{-16}$, ou $20\sqrt{-4}$
ou $40\sqrt{-1}$.

« Le $\sqrt{\quad}$ indique une moyenne proportionnelle entre la quan-
tité positive et la quantité négative. Or il est clair que \sqrt{bc} indique
« une moyenne proportionnelle entre $+b$ et $+c$, ou entre $-b$
« et $-c$. Ainsi $\sqrt{-bc}$ signifie une moyenne proportionnelle entre
« $+b$ et $-c$ ou entre $-b$ et $+c$. »

Dans le chapitre LXVII, Wallis donne un exemple géométrique

d'une moyenne proportionnelle, présentant \sqrt{bc} comme un sinus dans un cercle dont le diamètre est $b + c$. Après il trouve la base d'un triangle, étant donnés les deux côtés de l'angle opposé à cette base et à la hauteur partant de cet angle. Prenant $AP = 20$, $PB = 15$ et la hauteur $PC = 12$, au moyen du triangle PCB rectangle en C , il obtient deux valeurs réelles de la base AB . Après cela, posant $AP = 20$, $PB = 12$, et la hauteur $PC = 15$, il trouve pour cette base des valeurs imaginaires. Il les interprète ainsi :

« Cette impossibilité algébrique accuse une impossibilité dans
 « le cas géométrique proposé, et montre que le point B ne peut
 « se trouver dans la ligne AC tracée d'abord (en avant ou en
 « arrière) à partir de A .

« Cependant ces points sont (hors de cette ligne, mais) sur le
 « même plan. Si par chacun d'eux nous traçons les lignes AP et BP ,
 « nous avons un triangle où les côtés AP , BP satisfont aux con-
 « ditions, et où l'angle PAC et la hauteur PC (sur AC et non
 « sur AB) sont tels qu'on les a demandés. »

Dans ce cas, il suppose le triangle BCP rectangle en C , et il continue :

« Et (voir la figure) quoique les deux lignes AB et AB ne
 « soient pas (comme dans le premier cas où elles sont situées
 « sur AC) le double de AC , pourtant la ligne de base où se trou-
 « vent $A\beta$ et $A\beta$ est le double de AC , c'est-à-dire si à chacun de
 « ces AB nous joignons Bz égale à l'autre de ces lignes, et avec
 « la même déclivité, la ligne ACz (distance de Az) sera une ligne
 « droite égale au double de AC , comme l'est ACz dans le pre-
 « mier cas. La plus grande différence est ceci, que dans le premier
 « cas les points B et B se trouvant sur la ligne AC , les lignes AB
 « et AB n'en forment qu'une seule avec celle de la base, mais
 « que cela n'existe pas dans le dernier cas où B et B sont élevés
 « au-dessus de β et β (les points qui leur correspondent dans la
 « ligne de base, au-dessus desquels ils sont élevés) de telle manière
 « que le cas devienne possible (c'est-à-dire dans la relation où le
 « sinus-verse de CB est avec le diamètre PC). Mais dans les
 « deux cas ACz (la base de ABz) est égale au double de AC . »
 « De manière que, tandis que dans le cas des racines négatives
 « nous sommes à dire que le point B ne peut être trouvé, comme
 « nous le supposions, en avant de A , dans la ligne AC , mais bien

« en arrière, dans la même ligne, il faut dire ici, dans le cas
 « d'une racine de carré négatif que le point B ne peut être trouvé
 « dans la ligne AC, mais au-dessus de cette ligne, dans le même
 « plan. J'ai bien plus largement insisté là-dessus parce que cette
 « idée, à ce que je pense, est nouvelle ; et c'est là la déclaration
 « la plus complète que je puisse imaginer pour expliquer ce
 « qu'on appelle communément des racines imaginaires. Et celles-
 « ci le sont. »

De ces extraits, il résulte que Wallis possédait, au moins en germe, quelques éléments de la méthode moderne d'addition et de soustraction des lignes dirigées.

Mais dans le siècle qui le suivit, aucun progrès ne fut fait.

Euler, par exemple, fit largement usage des imaginaires. Pourtant, dans son Algèbre 1770, il fit cette observation :

« Toutes les expressions telles que $\sqrt{-1}$, $\sqrt{-2}$, etc., sont par
 « conséquent impossibles. Ce sont des quantités imaginaires,
 « puisqu'elles représentent des racines de quantités négatives ; et
 « de pareils nombres on peut dire certainement qu'ils ne sont
 « rien, ni plus grands que rien, ni plus petits que rien et qu'ils
 « constituent nécessairement l'imaginaire ou l'impossible. »

Le 10 mai 1797, un arpenteur du nom de Wessel présenta à l'Académie royale des sciences et lettres du Danemark un mémoire
 « sur la représentation analytique des directions. Il fut imprimé
 « en 1798 et parut dans le cinquième volume des *Mémoires de*
 « *l'Académie*, en 1799.

Caspar Wessel était né le 8 juin 1745 à Ionsrud, en Norwège, où son père était pasteur. Quoique l'un de quatorze enfants, il reçut une assez bonne éducation pour entrer en 1757 à la Haute-Ecole de Christiania, et pour aller en 1763 à Copenhague continuer ses études. En 1764, il fut engagé par l'Académie comme aide pour la triangulation et la préparation de la carte du Danemark. Jusqu'en 1805 il resta constamment au service de l'Académie comme arpenteur. Wessel était hautement estimé de ses contemporains, et, pour cette œuvre spéciale, sans compter les autres services rendus à l'Académie, il reçut de celle-ci la médaille d'argent et le recueil complet de ses mémoires. En 1819 lorsqu'un certain nombre de ces cartes furent déclarées vieilles, il fut fait une exception spéciale pour les déterminations trigono-

métriques de Wessel. En 1778 il passa un examen en droit romain. En 1815 il fut nommé chevalier de l'ordre du Danebrog. Il mourut en 1818. Quoique bien renommé comme arpenteur, Wessel fut passé sous silence comme mathématicien. Outre ce fait que cet écrit fut le premier reçu par l'Académie, aucun de ses membres, hors un seul, ne parla en sa faveur. L'acceptation fut due à Tetens, conseiller d'État, qui eut à examiner le manuscrit, et dont l'habileté pour ce genre de service était reconnue. Dans son histoire de l'Académie des sciences du Danemark, publiée en 1842, le professeur Jürgensen classa Wessel avec d'autres dans la catégorie suivante : « Les traités des autres mathématiciens sont des monographies dont la valeur scientifique n'est pas considérable » ou bien « ils sont trop spéciaux pour être plus amplement mentionnés. »

Dans l'introduction de son mémoire, Wessel dit :

« Le présent essai a pour objet la question de savoir comment
 « la direction doit être représentée analytiquement, c'est-à-dire
 « comment on devrait exprimer les segments des droites, si l'on
 « voulait, au moyen d'une équation unique entre un seul segment
 « inconnu et d'autres segments donnés, trouver une expression
 « représentant à la fois la longueur et la direction du segment
 « inconnu.

« Pour pouvoir répondre à cette question, je vais m'appuyer
 « sur deux considérations qui me paraissent évidentes. En
 « premier lieu, la variation de direction, qu'on peut produire
 « par des opérations algébriques, doit être représentée aussi par
 « leurs symboles. En second lieu, on ne peut soumettre la
 « direction à l'algèbre qu'en faisant dépendre ses variations
 « d'opérations algébriques. Or, selon la conception ordinaire,
 « on ne peut la transformer par ces opérations qu'en la direction
 « opposée, ou bien de positive en négative, et réciproquement.
 « Il s'ensuit que ces deux directions seulement seraient suscep-
 « tibles d'une représentation analytique conforme à la conception
 « connue, et que la solution du problème serait impossible pour
 « les autres directions. C'est probablement pour cette raison que
 « personne ne s'est occupé de cette matière. Sans doute on ne
 « s'est pas cru permis de rien changer à la définition une fois
 « adoptée des opérations. A cela il n'y a rien à objecter tant que

« la définition est appliquée à des quantités ordinaires ; mais il
 « existe des cas spéciaux où la nature propre des quantités semble
 « nous inviter à donner aux opérations des définitions particulières.
 « Alors, si l'on trouve ces définitions avantageuses, il me semble
 « que l'on ne doit pas les rejeter. En effet, en passant de l'Arithmé-
 « tique à l'analyse géométrique, c'est-à-dire des opérations rela-
 « tives à des nombres abstraits aux opérations sur des segments
 « de droite, on aura à considérer des quantités qui peuvent avoir
 « entre elles non seulement les mêmes relations que les nombres
 « abstraits, mais aussi un grand nombre de relations nouvelles.
 « Essayons donc de généraliser la signification des opérations :
 « n'en bornons pas, comme on l'a fait jusqu'à présent, l'usage
 « aux segments de droite de même sens ou de sens opposés,
 « mais étendons-en un peu la notion, de façon qu'elles s'appli-
 « quent, non seulement aux mêmes cas qu'auparavant, mais
 « encore à une infinité d'autres cas. Si, en même temps qu'on
 « prend cette liberté, on respecte les règles ordinaires des
 « opérations, on ne tombe pas en contradiction avec l'ancienne
 « théorie des nombres, mais on la développe seulement, on
 « s'accommode à la nature des quantités, et on observe la règle
 « générale qui commande de rendre, petit à petit, plus aisée à
 « comprendre, une théorie difficile. Il n'est donc pas absurde
 « d'exiger qu'on prenne en Géométrie les opérations dans un
 « sens plus étendu qu'en Arithmétique. On admettra aussi sans
 « difficulté qu'il sera possible ainsi de faire varier d'une infinité
 « de manières la direction des segments. Par là précisément,
 « comme on le démontrera plus loin, non seulement on réussit
 « à éviter toutes les opérations impossibles, et à expliquer ce
 « paradoxe qu'il faut quelquefois avoir recours à l'impossible
 « pour chercher le possible, mais encore on parvient à exprimer
 « la direction des segments de droite situés dans un même plan,
 « d'une manière aussi analytique que leur longueur, sans que la
 « mémoire soit embarrassée de nouveaux symboles ou de nou-
 « velles règles. Or il faut convenir que la démonstration générale
 « de théorèmes géométriques, devient souvent plus facile lors-
 « qu'on sait exprimer la direction d'une manière analytique et la
 « soumettre aux règles des opérations algébriques, que lors-
 « qu'on est réduit à les représenter par des figures qui ne sont

« applicables qu'à des cas particuliers. Il paraît donc être non
 « seulement admissible, mais même avantageux de se servir
 « d'opérations embrassant d'autres segments que ceux qui ont
 « le même sens ou le sens opposé.

« Pour ces raisons je me suis proposé :

« 1° De donner des règles des opérations de cette nature ;
 « 2° D'en montrer, par quelques exemples, l'application aux
 « cas où les segments se trouvent dans le même plan ;
 « 3° De déterminer par une méthode nouvelle, qui n'est pas algè-
 « brique, la direction des segments situés dans des plans différents ;
 « 4° D'en déduire la résolution générale des polygones plans
 « et des polygones sphériques ;
 « 5° De déduire de la même manière les formules connues de
 « la Trigonométrie sphérique.

« Voilà, brièvement indiqué, le contenu du présent mémoire.
 « Ce qui m'a donné l'occasion de l'écrire, c'est que je cherchais
 « une méthode qui permit d'éviter les opérations impossibles ;
 « l'ayant découverte, je l'ai employée pour me convaincre de la
 « généralité de certaines formules connues. »

C'est dans le mémoire lui-même qu'il faut voir comment
 l'auteur réussit à sortir du plan. Wessel dit :

« L'addition de deux segments se fait de la manière suivante :
 « on les combine en faisant partir l'un du point où l'autre se ter-
 « mine ; puis on joint par un nouveau segment les deux bouts de
 « la ligne brisée ainsi obtenue. »

Il étend sa définition à plus de deux segments, et il affirme :

« Dans l'addition des segments, l'ordre des termes est arbi-
 « traire, et la somme reste toujours la même. »

La définition du produit de deux segments est particulièrement
 remarquable :

« Le produit de deux segments de droite doit, sous tous les
 « rapports, être formé avec l'un des facteurs de la même manière
 « que l'autre facteur est formé avec le segment positif ou
 « absolu qu'on a pris égal à 1 ; c'est-à-dire que :

« 1° Les facteurs doivent avoir une direction telle qu'ils
 « puissent être placés dans le même plan que l'unité positive ;
 « 2° Quant à la longueur, le produit doit être à l'un des facteurs
 « comme l'autre l'est à l'unité ;

« 3° En ce qui concerne la direction du produit, si l'on fait partir
 « de la même origine l'unité positive, les facteurs et le produit,
 « celui-ci doit être dans le plan de l'unité et des facteurs, et doit
 « dévier de l'un des facteurs d'autant de degrés et dans le même
 « sens, que l'autre dévie de l'unité, en sorte que l'angle de
 « direction du produit ou sa déviation par rapport à l'unité
 « positive soit égale à la somme des angles de direction des
 « facteurs.

« Désignons par $+ 1$ l'unité rectiligne positive, par $+ \varepsilon$ une
 « autre unité perpendiculaire à la première et ayant même
 « origine : alors l'angle de direction de $+ 1$ sera égal à 0° ;
 « celui de $- 1$ à 180° ; celui de $+ \varepsilon$ à 90° et celui de $- \varepsilon$ à
 « $- 90^\circ$ ou à 270° ; et selon la règle que l'angle de direction du
 « produit est égal à la somme de ceux des facteurs, on aura :

$$\begin{array}{lll} (+ 1). (+ 1) = + 1 & (+ 1). (- 1) = - 1 & (- 1). (- 1) = + 1 \\ (+ 1). (+ \varepsilon) = + \varepsilon & (+ 1). (- \varepsilon) = - \varepsilon & (- 1). (+ \varepsilon) = - \varepsilon \\ (- 1). (- \varepsilon) = + \varepsilon & (+ \varepsilon). (+ \varepsilon) = - 1 & (+ \varepsilon). (- \varepsilon) = + 1 \\ & (- \varepsilon). (- \varepsilon) = - 1. & \end{array}$$

« Il en résulte que ε est égal à $\sqrt{- 1}$ et que la déviation du
 « produit est déterminée de telle sorte qu'on ne tombe en
 « contradiction avec aucune des règles d'opérations ordinaires. »

Il est intéressant de remarquer que, tandis que Wessel fait
 de l'addition et de la multiplication de lignes dirigées une
 matière à définitions, Argand, dans son fameux mémoire de
 1806, *Essai sur une manière de représenter les quantités ima-*
ginaires dans les constructions géométriques, dit : « Certains
 « points de théorie en algèbre et en géométrie portent sur des
 « principes admis par l'induction et dont la certitude est établie
 « plutôt par l'exactitude des conséquences qui en découlent que
 « par les raisonnements sur lesquels on les fonde. »

Pourtant, dans son dernier envoi aux *Annales de Gergonne*, il
 avoue que « il n'y aura plus de difficulté si, comme l'a fait
 « M. Français, on établit comme définition ce que l'on entend
 « par rapport de grandeur et de position entre deux lignes. »

Après avoir expliqué que si φ représente un angle et $\sin \varphi$ un
 segment égal en longueur à son sinus, positif si l'arc mesuré
 se termine dans la première demi-circonférence, négatif s'il se

termine dans la seconde, $\varepsilon \sin \varphi$ désignera le sinus de l'angle φ en direction et en grandeur, Wessel montre qu'un rayon formant l'angle φ avec l'unité positive est égal à $\cos \varphi + \varepsilon \sin \varphi$. Dans la multiplication de deux rayons $\cos \varphi + \varepsilon \sin \varphi$ et $\cos u + \varepsilon \sin u$, il établit la loi distributive en la tirant des formules :

$$\begin{aligned}\sin (\varphi + u) &= \sin \varphi \cos u + \cos \varphi \sin u \\ \cos (\varphi + u) &= \cos \varphi \cos u - \sin \varphi \sin u\end{aligned}$$

au contraire d'Argand qui prend ces lois distributives pour en tirer les formules trigonométriques.

Une des phrases de cet ensemble mérite d'être remarquée.

« Mais si l'on avait à multiplier des segments de droite qui ne se trouvent pas tous les deux dans un plan passant par l'unité absolue, on ne pourrait appliquer la règle précédente. C'est pour cette raison que je ne m'occupe pas de la multiplication de pareils segments. »

La manière de faire la division suit naturellement, et on prouve que les quantités indirectes (inverses) partagent avec les quantités directes cette propriété que si le dividende est une somme, vous obtenez en divisant chaque terme de cette somme par le diviseur, plusieurs quotients dont la somme est le quotient cherché.

Puis vient une discussion sur les puissances et les racines établissant ce fait que $(\cos \varphi + \varepsilon \sin \varphi)^{\frac{1}{m}}$ n'a que m valeurs différentes. Dans le paragraphe suivant Wessel montre que la m^{me} puissance d'une ligne peut être mise sous la forme $e^{ma + mb \sqrt{-1}}$ où e^{ma} représente la longueur et mb l'angle de direction, et que nous avons ainsi une nouvelle manière de représenter la direction d'une ligne dans un plan au moyen des logarithmes naturels. Cette dernière chose n'est pas dite, mais il est facile de voir que Wessel était en possession des trois manières actuelles de représenter les nombres complexes :

$$a + b \sqrt{-1} \quad r (\cos \varphi + \sqrt{-1} \sin \varphi) \quad \text{et} \quad r e^{\varphi \sqrt{-1}}$$

Et à la fin de cette section l'auteur remarque :

« Je présenterai une autre fois, si l'Académie me le permet, les preuves complètes de ces théorèmes. Ayant rendu compte à présent de la manière dont il faut, selon moi, entendre la

« somme, le produit, le quotient et la puissance des segments
 « de droite, je me bornerai ici à donner quelques exemples de
 « l'application de la méthode. »

La première application est le théorème de Cotes qui énonce et établit préalablement la proposition fondamentale de la *Théorie des équations algébriques*. La seconde est la résolution des polygones plans.

Dans celle-ci se rencontrent des notations caractéristiques. Le premier côté du quadrilatère pris pour exemple est posé comme égal à l'unité absolue ; les côtés qui suivent en commençant par celui-ci sont désignés par les numéros II, IV, VI, VIII, tandis que les numéros I, III, V, VII désignent leurs déviations en degrés des prolongements des côtés précédents, déviations considérées comme positives ou bien négatives selon qu'elles ont lieu dans le même sens que le cours du soleil, ou dans un sens contraire. I', III', V', VII', sont mis pour les expressions $\cos I + \varepsilon \sin I$, etc., tandis que I⁻, III⁻, V⁻, VII⁻ sont mis pour $\cos (-I) + \varepsilon \sin (-I)$, etc.

L'auteur en déduit ces deux formules :

$$\begin{aligned} \text{II} + \text{IV} \cdot \text{III}' + \text{VI} \cdot \text{III}' \cdot \text{V}' + \text{VIII} \cdot \text{III}' \cdot \text{V}' \cdot \text{VIII}' &= 0 \\ \text{II} \cdot \text{III}' \cdot \text{V}' \cdot \text{VII}' + \text{IV} \cdot \text{V}' \cdot \text{VII}' + \text{VI} \cdot \text{VII}' + \text{VIII} &= 0 \end{aligned}$$

et il prouve que deux équations de cette forme suffisent pour la résolution d'un polygone où il n'y a d'inconnus que trois angles, ou deux angles et un côté, ou un angle et deux côtés. Immédiatement après, Wessel attaque le problème de la représentation d'une ligne dans l'espace en plaçant celle-ci sous forme de rayon dans une sphère. Prenant trois rayons perpendiculaires (entre eux) comme axes, il les prend comme unités positives, celui à gauche étant nommé 1, celui qui avance ε et celui qui monte η , et établit que $\varepsilon^2 = -1$ et que $\eta^2 = -1$. Il conclut que le rayon dont l'extrémité a pour coordonnées $x, \eta y$ et εz doit être justement désigné par $x + \eta y + \varepsilon z$. Définissant le plan de r et εr comme plan horizontal, celui de r et ηr comme plan vertical, il examine l'effet du mouvement de l'extrémité de cette ligne suivant un arc de I degrés, parallèle au plan horizontal, et il obtient pour $x + \eta y + \varepsilon z$ les nouvelles valeurs

$\eta y + (x + \varepsilon z) (\cos I + \varepsilon \sin I) = \eta y + \cos I - z \sin I + \varepsilon x \sin I + \varepsilon z \cos I$
 dans lesquels le terme ηy reste sans changement.

Il indique cette opération par le signe » par exemple

$$(x + \eta y + \varepsilon z) \gg (\cos I + \varepsilon \sin I)$$

et il dit que ce signe est celui d'une multiplication imparfaite parce que le multiplicande est en dehors du plan du multiplicateur (et de l'unité positive). Il appelle l'attention sur ce fait que les facteurs doivent être pris en allant de gauche à droite. De même si l'extrémité du rayon se mouvait suivant un arc de II degrés parallèlement au plan vertical, nous aurions :

$$(x + \eta y + \varepsilon z) \gg (\cos II + \eta \sin II) = \varepsilon z + x \cos II - y \sin II \\ + \eta x \sin II + \eta y \cos II.$$

D'où il suit que

$$(z + \eta y + \varepsilon z) \gg (\cos I + \varepsilon \sin I) \gg (\cos III + \varepsilon \sin III) \\ = (x + \eta y + \varepsilon z) \gg [\cos (I + III) + \varepsilon \sin (I + III)]$$

et

$$(x + \eta y + \varepsilon z) \gg (\cos II + \eta \sin II) \gg (\cos IV + \eta \sin IV) \\ = (x + \eta y + \varepsilon z) \gg [\cos (II + IV) + \eta \sin (II + IV)]$$

de manière que

$$x + \eta y + \varepsilon z = (x + \eta y + \varepsilon z) \gg (\cos I + \varepsilon \sin I) \gg (\cos I - \varepsilon \sin I) \\ = (x + \eta y + \varepsilon z) \gg (\cos II + \eta \sin II) \gg (\cos II - \eta \sin II).$$

Wessel étudie après l'effet de rotations alternativement horizontales et verticales. Représentant par s le rayon dans sa position primitive et par S dans la position finale, et notant tous les arcs décrits par les numéros d'ordre I, II, III... etc., il obtient la formule :

$$S = s \gg I' \gg II' \gg III' \gg IV' \gg V' \gg VI'.$$

Dans cette formule il a observé qu'une réunion de facteurs pouvaient être transposés dans le premier membre sous forme de facteurs réciproques et posés dans le sens inverse. Ainsi

$$S \gg VI'^{-1} \gg V'^{-1} \gg III'^{-1} = s \gg I' \gg II' \gg III''.$$

Ces résultats sont applicables à la résolution des polygones sphériques et à la détermination des propriétés des triangles sphériques. Dans le cas de polygones plans les numéros I, II, III, etc., représentent les angles extérieurs et les côtés dans l'ordre

où ils se suivent, les nombres impairs les angles et les pairs les côtés. Supposant les angles et les côtés d'un polygone connus à l'exception soit d'un angle et de deux côtés, ou de deux angles et d'un côté, ou de trois angles, ou de trois côtés les parties inconnues peuvent être déterminées par l'équation

$$s \gg I' \gg II' \gg III' \gg IV' \gg V' \gg VI' \gg \dots, \gg N' = s$$

où s est indéterminé et peut être supposé égal à r , εr ou γr . L'effet des rotations indiquées est de soumettre cette sphère alternativement à des rotations autour de l'axe du cercle horizontal et autour de l'axe du cercle vertical, de manière que chaque point de la sphère décrive d'abord un arc de cercle horizontal d'une ouverture égale à celle du premier angle extérieur du polygone, puis un arc vertical égal à l'angle que forme le premier côté, puis encore un arc horizontal d'ouverture égale à celle du second angle extérieur, etc. La sphère finalement revient à sa position primitive puisque chacun de ses points a décrit autant d'arcs horizontaux que le polygone a d'angles et autant d'arcs verticaux qu'il a de côtés.

Pendant que les résultats de Wessel sont justes jusqu'au point où il les pousse, il oublie cependant d'observer qu'une rotation quelconque se décompose en trois rotations autour des axes ε , γ , ε ou bien encore autour des axes γ , ε , γ . Il est encore plus étrange qu'il n'ait étudié les rotations autour de l'axe réel. Thielé, dans son introduction au mémoire de Wessel nous montre combien il lui aurait été facile de faire un pas de plus et d'arriver à la notion des Quaternions. Mais, quoi qu'il en soit, Wessel mérite une grande considération pour avoir inventé la seule méthode avec laquelle on ait pu soumettre au calcul les droites de l'espace, avant l'ouvrage de Hamilton commencé en 1843.

Sans songer qu'Euler avait démontré que $\sqrt{-1} \sqrt{-1}$ était une quantité réelle, Argand s'efforça de montrer qu'une pareille expression pourrait servir pour la représentation des lignes dirigées dans l'espace. Français essaya de résoudre le problème au moyen d'angles imaginaires, mais il reconnut franchement son erreur. Servois vit avec une remarquable clarté ce qui manquait, mais sans pouvoir y suppléer. Il dit :

« La table à double argument que vous (Gergonne) proposez

« étant appliquée sur un plan conçu divisé par points ou carreaux
 « infinitésimes de manière que chaque point correspondît à un
 « nombre qui en serait l'*indice* et la *cote* serait très propre à
 « indiquer la grandeur et la position des rayons vecteurs qu'on
 « ferait tourner autour du point ou carreau central portant ± 0 ;
 « et il est bien remarquable qu'en désignant alors par α la lon-
 « gueur d'un rayon vecteur, par α l'angle qu'il ferait avec la ligne
 « réelle ... — 1, 0, + 1...; par x, y les coordonnées rectangles du
 « point extrême opposé à l'origine, rapporté à cette ligne réelle
 « comme axe des x , la cote de ce point serait exprimée par
 « $x + y\sqrt{-1}$.

« Il est clair que votre ingénieuse disposition tabulaire des
 « grandeurs numériques peut être considérée comme une *tranche*
 « *centrale* d'une table à triple argument et pourrait servir à
 « fixer, de grandeur et de position, les droites dans l'espace.
 « Vous donneriez sans doute à chaque terme la forme trino-
 « miale ; mais quel coefficient aurait le troisième terme ? Je ne
 « le vois pas trop. L'analogie semblerait exiger que le trinôme
 « fût de la forme

$$p \cos \alpha + q \cos \beta + r \cos \gamma$$

« α, β et γ étant les angles avec trois axes rectangulaires, et
 « qu'on eût :

$$(p \cos \alpha + q \cos \beta + r \cos \gamma) (p' \cos \alpha + q' \cos \beta + r' \cos \gamma) \\ = \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1.$$

« Les valeurs de p, q, r, p', q', r' , qui satisferaient à cette condi-
 « tion seraient absurdes, mais seraient-elles réductibles à la
 « forme $A + B\sqrt{-1}$?

Comme nous le savons, toutes ces quantités non réelles que Servois ne peut déterminer peuvent être identifiées avec les $+i, +j, +k, -i, -j, -k$ des Quaternions d'Hamilton.

En 1799, dans le premier mémoire qu'il ait publié, *Demonstratio nova theorematis omnem functionem algebraicam rationalem integram unius variabilis in factores reales primi vel secundi gradus resolvi posse*, le célèbre Gauss, âgé de vingt-deux ans seulement, dit :

« Par quantité imaginaire, j'entends toujours ici une quantité

« exprimée sous la forme $a + b\sqrt{-1}$ où b n'est pas égal à 0...
 « Si les quantités imaginaires sont à retenir en analyse (ce qui,
 « pour bien des raisons, me semble préférable à les rejeter,
 « pourvu qu'elles soient établies sur un fondement suffisamment
 « solide), il faudrait qu'on puisse les considérer comme aussi pos-
 « sibles que les quantités réelles ; et dans ces calculs je préfère
 « renfermer les quantités réelles et imaginaires toutes les deux
 « sous la dénomination commune de quantités possibles... Je
 « remets pour une autre occasion la justification de ces quantités
 « imaginaires sous forme d'une exposition plus fructueuse de
 « toute cette matière. »

Cette occasion cependant semble ne s'être présentée que trente ans plus tard. Dans les *Annales savantes de Göttingue*, du 23 avril 1831, dans un rendu compte que Gauss fait de son propre ouvrage : *Theoria residuorum quadraticarum, commentatio secunda*, il dit :

« Notre Arithmétique générale, en tant qu'elle excelle à étendre
 « la Géométrie des anciens, est entièrement une création des
 « temps modernes. Partie d'abord de la notion des nombres
 « absolus, elle a graduellement élargi son domaine. Aux nombres
 « entiers elle a joint les fractions, aux quantités rationnelles les
 « quantités irrationnelles ; à la quantité positive la quantité
 « négative ; aux nombres réels les nombres imaginaires. Ces
 « progrès néanmoins ont toujours été faits à pas bien timides et
 « bien hésitants. Les anciens algébristes appelaient les racines
 « négatives des équations des racines fausses, et elles le sont en
 « effet, quand le problème pour lequel la relation a été posée
 « présente des quantités auxquelles on ne peut en attribuer
 « d'autres qui leur soient opposées. Mais c'est justement dans
 « l'Arithmétique générale que personne n'hésite à admettre les
 « fractions, lorsqu'il y a cependant tant d'objets capables d'être
 « représentés par des nombres, pour lesquels les fractions n'au-
 « raient aucun sens ; de même il ne faut pas refuser aux nombres
 « négatifs les droits accordés aux nombres positifs par la raison
 « qu'il y a d'innombrables choses auxquelles on n'en peut oppo-
 « ser d'autres. La réalité des nombres négatifs est suffisamment
 « justifiée puisque dans d'innombrables autres cas ils trouvent
 « des objets auxquels ils peuvent s'appliquer (*substratum*) exac-

« tement. Cela est admis depuis longtemps ; mais les quantités
 « imaginaires, anciennement et parfois encore de nos jours,
 « quoique à tort, nommées impossibles, furent encore plutôt tolé-
 « rées qu'entièrement naturalisées, et elles apparaissent plutôt
 « comme un vain jeu de symboles auquel tout substratum imagi-
 « nable est dénié sans hésitation par des gens qui ne songent
 « pourtant pas à déprécier la riche contribution dont ce jeu de
 « symboles a enrichi le trésor des relations entre elles des quan-
 « tités réelles.

« Il y a nombre d'années déjà que l'auteur a considéré cette
 « importante partie des mathématiques sous un tout autre point
 « de vue, à savoir que pourtant une existence objective peut être
 « assignée aussi bien aux valeurs imaginaires qu'aux négatives.
 « Mais si jusqu'à ce jour il n'a pas cru à l'opportunité de publier
 « ses vues, cependant les lecteurs que cela intéresse peuvent en
 « trouver des traces dans le mémoire sur les équations qui a
 « paru en 1799, et encore dans le mémoire couronné, sur les
 « *Transformations des surfaces*. Dans le présent mémoire, les
 « contours en sont donnés brièvement et consistent en ce qui
 « suit :

« Les nombres positifs et négatifs ne peuvent trouver d'appli-
 « cation que lorsque les choses comptées sont d'espèces oppo-
 « sées de telle façon qu'une unité d'une espèce a pour effet de
 « neutraliser une unité de l'autre espèce. A bien dire, cette
 « supposition ne peut être faite que lorsque les objets comptés
 « sont non pas des substances, des objets qu'on peut considérer
 « comme existants par eux-mêmes, mais des relations entre de
 « tels objets. Il est nécessaire que ces objets forment en quelque
 « sorte une série

... *e, g, A, B, C, D.....*

« et que le rapport qui existe entre A et B puisse être regardé
 « comme égal à celui entre B et C, et ainsi de suite. Cette
 « notion d'opposition implique encore l'échange possible entre
 « les termes de la relation s'opérant de telle manière que si la
 « relation, ou si vous préférez le passage de A à B soit marqué
 « par $+ 1$, celui de B à A par $- 1$. En tant qu'une pareille
 « série est illimitée des deux côtés, chaque nombre entier réel

« représentera la relation entre un terme pris arbitrairement
 « comme origine, à un terme déterminé de la série.

« Si cependant les objets sont de telle nature qu'on ne peut les
 « arranger en une seule série, mais bien en séries de séries, ou
 « que l'ensemble de ces choses forme une multitude disposée
 « sur deux dimensions ; si alors la même connexion existe dans
 « le passage d'une série à l'autre, que dans le passage d'un terme
 « à l'autre de la même série, on aura nécessairement besoin,
 « outre les unités primitives $+ 1$ et $- 1$, de deux nouvelles
 « unités opposées entre elles, $+ i$ et $- i$. Il faut alors établir
 « préalablement que l'unité i doit toujours marquer le passage
 « d'un terme donné d'une série à un terme défini de la série
 « immédiatement adjacente. De cette manière le système peut
 « être établi de double façon en série de séries.

« Les mathématiciens font entièrement abstraction de la
 « nature des objets et ne s'occupent que de leurs relations. Ils
 « n'ont à faire que l'énumération et la comparaison de leurs
 « rapports, et la ressemblance qui existe entre les relations
 « marquées par $+ 1$ et $- 1$ peut être certainement étendue
 « aux quatre éléments $+ 1$, $- 1$, $+ i$ et $- i$.

« Ces relations ne peuvent être rendues intuitives que par une
 « représentation géométrique, et pour le faire le plus simple-
 « ment possible il n'y a pas de raison d'employer une autre
 « manière que la manière carrée (le quadrillage, c'est-à-dire
 « que dans un plan illimité l'on trace des carrés au moyen d'un
 « double système de lignes parallèles se coupant à angle droit,
 « et on prend les points d'intersection comme symboles. Chacun
 « de ces points est entouré de quatre points adjacents, et si l'on
 « désigne le rapport du point A à n'importe lequel des points
 « voisins par $+ 1$, le sens du symbole $- 1$ est déterminé par
 « cela même ; après on peut prendre pour $+ i$ lequel on voudra
 « des deux autres points, c'est-à-dire qu'on peut marquer par
 « $+ i$ le passage au point de droite ou à celui de gauche. La
 « distinction entre la droite et la gauche, dès que nous avons
 « fixé à volonté ce que nous appellerons en avant et en arrière
 « dans le plan, au-dessus et au-dessous par rapport aux deux
 « côtés du plan, est complètement déterminée par elle-même,
 « bien que nous ne puissions faire partager à d'autres notre

« intuition qu'au moyen d'objets matériels réellement existants.
 « Mais quand nous aurons décidé de tout cela, nous verrons que
 « nous aurons encore matière à choix pour savoir laquelle de
 « deux séries qui se coupent en un point doit être choisie comme
 « la série principale, et quelle direction dans celle-ci doit être
 « choisie pour avoir affaire aux nombres positifs. Nous voyons
 « encore que si l'on veut mettre $+ 1$ pour la relation exprimée
 « auparavant par $+ i$ nous devons nécessairement mettre $+ i$
 « pour la relation exprimée avant par $- 1$. Dans le langage des
 « mathématiciens cela veut dire que $+ i$ est une moyenne pro-
 « portionnelle $+ 1$ et $- 1$, et correspond au symbole $\sqrt{- 1}$.
 « Nous ne disons pas la moyenne parce que $- i$ a le même droit
 « à cette dénomination. La démonstrabilité d'une signification
 « intuitive de $\sqrt{- 1}$ est donc pleinement justifiée, et nous
 « n'avons plus besoin d'autre chose pour faire entrer les quan-
 « tités imaginaires dans le domaine des objets réels de l'arith-
 « métique.

« Nous avons pensé rendre un service aux amis des mathé-
 « matiques par cette brève exposition des principaux éléments
 « d'une théorie nouvelle des soi-disant quantités imaginaires. Si
 « l'on a considéré ce sujet sous un faux point de vue, et si l'on y
 « a par suite trouvé une mystérieuse obscurité, cela est largement
 « du à une nomenclature impropre. Si au lieu de donner à $+ 1$,
 « $- 1$, $\sqrt{- 1}$ les noms d'unité positive, négative, imaginaire
 « (ou impossible) on les avait nommés unité directe, inverse,
 « latérale, une pareille obscurité aurait eu de la peine à s'intro-
 « duire. Ce sujet auquel, avec assez de raisons, j'ai touché inci-
 « dentellement dans le présent traité, l'auteur se réserve de le
 « traiter plus tard d'une façon plus complète, et d'y montrer
 « que, où les relations entre deux choses présentent une compli-
 « cation assez grande pour nécessiter plus de deux dimensions,
 « il n'y a plus, pour les exprimer, d'autres classes de grandeurs
 « admissibles en arithmétique. »

C'est ainsi que Gauss présente magistralement les principes fondamentaux de la théorie des imaginaires. L'impulsion donnée en Allemagne par cette grande influence s'est étendue jusqu'à nos jours.

Le mémoire de Buée sur les quantités imaginaires dont il a été

donné lecture devant la Société royale à Londres en 1805 et couvrant 65 pages des *Transactions philosophiques* est tant soit peu vague et insuffisant.

Voici ce qu'il dit de $\sqrt{-1}$:

« $\sqrt{-1}$ n'est donc pas le signe d'une opération *arithmétique*,
« ni d'une opération *arithmético-géométrique*, mais d'une opéra-
« tion purement *géométrique*. C'est un signe de perpendicula-
« rité. C'est un signe purement descriptif... qui indique la direc-
« tion d'une ligne, abstraction faite de sa longueur. »

Au moment d'achever son travail il examine ce que deviennent les sections coniques quand leurs coordonnées deviennent imaginaires, et il décide que le cercle se transforme en une hyperbole équilatère dans le plan perpendiculaire à celui du cercle, et de même pour les autres coniques.

Une plus longue discussion sur le mémoire justement célèbre et faisant époque, d'Argand, et les additions qu'il y porta lui-même, ainsi que Français et Servois dans les *Annales de Gergonne* de 1813 à 1815 est rendu inutile par la réédition qu'en 1874 Houel a faite de ces écrits, et par leur traduction en anglais de Hardy en 1881.

Ce qui est intéressant à noter, ce sont les anciennes vues sur les imaginaires d'un mathématicien aussi distingué que Cauchy ; dans son *Cours d'analyse* 1821, il dit :

« Dans l'analyse on applique le terme d'expression symbo-
« lique ou symbole à chaque combinaison de signes algébriques
« qui n'ont aucun sens par eux-mêmes, ou auxquelles on attribue
« une valeur différente de celles qu'elles devraient naturelle-
« ment avoir... Parmi les expressions symboliques qui sont d'une
« certaine importance en analyse il faut distinguer spéciale-
« ment celles qu'on nomme imaginaires... »

« Nous écrivons la formule

$$\cos(a + b) + \sqrt{-1} \sin(a + b) = (\cos a + \sqrt{-1} \sin a)(\cos b + \sqrt{-1} \sin b).$$

« Les trois expressions que contient l'égalité ci-devant... sont
« trois expressions symboliques qui ne peuvent être interpré-
« tées suivant les conventions généralement établies et qui ne
« représentent rien de réel... L'égalité elle-même, à proprement
« dire, est inexacte et sans aucun sens. »

Pourtant en 1849, dans un écrit sur les quantités géométriques dans lequel il rend l'honneur qui leur est dû à Argand, Français et d'autres, il reconnaît :

« Dans mon *Analyse algébrique*, publiée en 1821, je me contentais de montrer que la théorie des expressions imaginaires et des équations peut être rendue rigoureuse en considérant ces équations comme symboliques. Mais après de nouvelles et mûres réflexions, le meilleur parti à prendre, c'est, il nous semble, l'abandon entier du signe $\sqrt{-1}$, et de remplacer la théorie des quantités imaginaires par celle des quantités géométriques. »

Après avoir défini le terme de quantités géométriques comme nous définissons celui de vecteur, et après avoir défini l'égalité de deux quantités géométriques, il continue :

« La notion de quantité géométrique doit comprendre comme un cas particulier celle de la quantité algébrique, positive ou négative, et à plus forte raison celle de la quantité arithmétique... Il reste à définir les différentes fonctions de ces quantités, particulièrement leurs sommes, leurs produits, leurs puissances entières, en choisissant des définitions telles que nous pouvons encore les adopter quand nous calculons avec des quantités algébriques seules. Ces conditions seront remplies si on adopte les conventions que nous allons donner. »

A la suite des définitions ci-dessus indiquées vient un traité complet satisfaisant pleinement aux demandes modernes, Cauchy observe qu'une large part des résultats des investigations d'Argand et d'autres lui semblent avoir été découverts plus tôt, en 1787, par Henri-Dominique Truel qui les communiqua vers 1810 à Augustin Normand au Havre.

En 1828, parut à Cambridge, en Angleterre, un ouvrage remarquable du Rev. John Warren, intitulé : *Traité sur la représentation géométrique des racines carrées des quantités négatives*. Quoique ce livre n'ait eu dans ces derniers temps que peu de crédit, ses mérites furent cependant pleinement appréciés par de Morgan, et Hamilton reconnut clairement ce qu'il lui devait.

Dans tout l'ouvrage de Warren le terme quantité, comme la quantité géométrique de Cauchy, indique une ligne donnée en longueur et en direction. Suivent alors ces définitions :

« La somme de deux quantités est la diagonale du parallé-
 « gramme ayant ces quantités pour côtés. On dit que la pre-
 « mière de deux quantités est avec la seconde dans le même
 « rapport que la troisième avec la quatrième, quand la première
 « est avec la seconde dans le même rapport de longueur que la
 « troisième avec la quatrième, conformément à la définition
 « d'Euclide, et quand encore l'angle d'inclinaison de la quatrième
 « sur la troisième est égal à l'angle d'inclinaison de la seconde
 « sur la première, ces inclinaisons étant mesurées dans le même
 « sens. — L'unité est une quantité positive prise arbitrairement
 « pour déterminer par comparaison avec elle les valeurs d'autres
 « quantités. Si de trois quantités l'unité est à la première, comme
 « la seconde à la troisième, la troisième est appelée le produit
 « de la seconde par la première; la première est appelée le quo-
 « tient de la seconde par la troisième. »

Les lois de l'Algèbre qui gouvernent ces quantités sont établies dans leur plus grande généralité avec une vigueur de raisonnement qui n'a probablement pas été surpassée. L'auteur alla même jusqu'à déduire la formule binomiale, à développer beaucoup de séries, et à appliquer les méthodes du calcul différentiel et intégral aux quantités de la classe définie. Dans sa forme l'œuvre de Warren est algébrique dans la force du terme, et vraiment hérissée de formules.

En somme, Caspar Wessel en 1797, publia le premier traité clair, précis et scientifique sur les lignes dirigées dans un même plan, comme représentées par les quantités de la forme $a + b\sqrt{-1}$, établissant les lois qui gouvernent leur addition, soustraction, multiplication et division, et montrant leur utilité pratique pour la démonstration des théorèmes et la solution des problèmes. Il a produit ainsi une théorie partielle des rotations dans l'espace, en tant que celles-ci peuvent être décomposées en rotations autour de deux axes formant angle droit.

Peu de temps après, en 1799, Gauss indiqua qu'il était en possession d'une méthode pour calculer avec des quantités de forme $a + b\sqrt{-1}$ considérées comme possibles aussi bien que les quantités réelles; mais une exposition plus claire fut retardée jusqu'en 1831.

L'écrit de Buée de 1805 met une grande emphase à présenter

$\sqrt{-1}$ comme un signe de perpendicularité, mais il ne songe pas à donner une interprétation suffisante de la multiplication des lignes dirigées.

Le fameux mémoire d'Argand de 1806 est à peine en danger d'être reçu avec trop de confiance. Quoique écrit après celui de Wessel, il n'y a pas la moindre apparence qu'Argand ait eu connaissance de l'arpenteur norvégien, et, par le fait, certains de ses théorèmes sont établis moins rigoureusement que chez Wessel. Argand donne de nombreuses applications de ses théories à la trigonométrie, la géométrie, l'algèbre, applications vraiment remarquables, spécialement sa démonstration du théorème de Ptolémée relatif au quadrilatère inscrit et celle de la proposition fondamentale de la théorie des équations.

Les contributions de Français, Gergonne et Servois, 1813-1815, servent à écarter les erreurs dans lesquelles Argand était tombé et à rendre plus claires les notions fondamentales sur cet objet.

Quoique le livre de Warren de 1828 contienne des définitions différant à peine de celles de Wessel et de Français, et une notation qui ressemble sans aucun changement à celle de Français, son traité généralisé de la direction des lignes dans le plan doit être regardé comme hautement original.

L'ouvrage de Cauchy consiste dans l'extension et le développement des idées de ses prédécesseurs, plutôt que dans l'introduction de nouvelles idées.

Tels furent les commencements de l'étude de la représentation géométrique des imaginaires, qui dans les temps modernes nous a conduits à de si grands corps de doctrines, comme la théorie des fonctions d'un côté, celle des Quaternions de l'autre avec la *Ausdehnungslehre* qui occupe une position entre les deux.

Qui pourrait dire les progrès que lui fera faire le prochain siècle ?

W.-W. BEMAN (Ann Arbor, Mich., U. S. A.).

(Traduit de l'anglais par Ch. BERDELLÉ.)