Constructions des triangles et des polygones. Quadrangles. — CHAP. II. *Angoloïdes* (angles polyèdres). Egalité des trièdres et des angoloïdes. Construction des trièdres et des angoloïdes. — CHAP. III. *Polyèdres.* Pyramide. Prisme. Parallélipède.— CHAP. IV. *Distances.* Quelques problèmes. — EXERCICES.

LIVRE III. — CHAP. Ier. *Relations entre droites, plans et sphères.* Relation d'une droite avec un cercle et d'un plan avec une sphère. Relations des angles avec un cercle. Relations de deux cercles dans un plan ou sur une sphère. Quelques problèmes. — CHAP. II. *Relations des polygones avec un cercle et des polyèdres avec une sphère.* Polygones réguliers. Polyèdres réguliers. — CHAP. III. *Géométrie sur la sphère.* Angles et polygones sphériques. Cercles sur la sphère. Polygones inscrits ou circonscrits à un cercle sur la sphère. — CHAP. IV. *Surfaces et solides de révolution.* Surface conique et cône. Surface cylindrique et cylindre. — EXERCICES.

LIVRE IV. — CHAP. Ier. *Théorie générale de l'équivalence.* — CHAP. II. *Equivalence de polygones et surfaces polyédriques.* Transformation des polygones en rectangles équivalents d'une même série. Relation des rectangles, ou carrés, construits sur les côtés d'un triangle ou d'un quadrilatère. Quelques problèmes. Equivalence de quelques surfaces polyédriques.— CHAP. III. *Equivalence des polygones sphériques et des pyramides sphériques.* — CHAP. IV. *Equivalence des prismes.* — CHAP. V. *Grandeurs limites.* — CHAP. VI. *Equivalence des polyèdres.* — CHAP. VII. *Equivalence du cercle et des corps ronds.* Equivalence du cercle. Equivalence du volume et de la surface du cylindre. Equivalence de la surface et du volume du cône rond (droit). Equivalence de la surface et du volume de la sphère. — EXERCICES.

LIVRE V. — CHAP. Ier. *Théorie des proportions.* Grandeurs commensurables et incommensurables et grandeurs proportionnelles. Proportionnalité des segments, des surfaces et des volumes. — CHAP. II. *Homothétie et similitude.* Figures homothétiques. Figures semblables. Quelques problèmes. — CHAP. III. *Mesure.* Unité de mesure. Circonférence du cercle. Aires des surfaces. Volumes des solides.— CHAP. IV. *Application de l'algèbre à la Géométrie.* Relations algébriques des éléments d'un triangle, d'un quadrangle inscrit dans un cercle et d'un tétraèdre. Mesure des côtés, des apothèmes et de la surface de quelques polygones réguliers inscrits ou circonscrits à un cercle en fonction du rayon. Mesure des surfaces et des volumes des polyèdres réguliers. Calcul du nombre $\pi$. — EXERCICES.

L. R.

P. APPELL, membre de l'Institut. **Eléments d'analyse mathématique** *à l'usage des ingénieurs et des physiciens.* Cours professé à l'Ecole centrale des Arts et Manufactures. Prix 24 fr.; Paris, Georges Carré et C. Naud, éditeurs, 3, rue Racine; 1898.

Le style général des traités mathématiques de notre époque a été fixé par les travaux de Lagrange, Laplace, Legendre, Lacroix, Poisson et d'autres mathématiciens français. Ils y ont introduit toutes les ressources de puissance et de délicatesse dont la langue française est si bien pourvue, pour exprimer clairement et logiquement les idées.

Les traditions de ces écrivains sont conservées actuellement avec tant de soin que tous les travaux qui concernent les méthodes d'instruction destinées aux mathématiciens français, comme le livre dont nous voulons parler, sont étudiées avec ardeur par les étrangers, soucieux et désireux d'en profiter dans leur propre intérêt.

La première chose qui nous frappe, c'est le grand avantage que possède l'étudiant français, d'avoir été initié, dès ses premiers pas en Algèbre, à la conception fondamentale d'une quantité variable et de ses dérivées. L'auteur est ainsi dispensé d'une foule de définitions préliminaires : il n'a pas besoin d'expliquer de nombreuses notations, et se trouve en état de procéder dès l'abord, avec raffinement, aux démonstrations fondamentales, ce qu'il ne saurait faire s'il s'adressait à un commençant.

Il est malheureux que la tradition newtonienne ne soit pas encore éteinte chez nous, en Angleterre : il en résulte que nos étudiants ont été jusqu'ici détournés d'une étude du calcul infinitésimal par trop de propositions géométriques préliminaires, dans la méthode d'enseignement suivie pour éviter le calcul : on a l'idée de les amener à reconstituer la suite géométrique des raisonnements employés par Newton.

Une recherche dans les documents de Newton, effectuée par feu le professeur J.-C. Adams, a révélé que Newton, ainsi que chacun de nous, employa la méthode analytique comme moyen d'invention : et que ses démonstrations furent reprises sous une forme géométrique grecque, pour donner satisfaction au pédantisme académique de son temps ; ainsi se trouve entièrement justifiée cette critique de Laplace, reproduite par Schopenhauer, que les démonstrations newtoniennes *manquent de sincérité*.

La remarque historique de la page 7, qui fait ressortir la priorité de la notion de l'intégrale sur celle du coefficient différentiel, est d'un grand intérêt : cela montre à la fois l'un des côtés singuliers de l'esprit humain, et l'importance de la méthode moderne suivie dans ce livre, où l'on traite simultanément le calcul intégral et différentiel, de préférence à l'ancien plan, divisant ces deux sujets, à part, dans des volumes séparés. Les progrès de la science ne se constatent qu'à la longue : c'est ainsi qu'il est aisé de reconnaître la croissance d'une plante ou d'un arbre après une certaine période de temps : au contraire, la vitesse actuelle de croissance est imperceptible à nos sens, à moins qu'on ne la représente par une série de photographies dans un cinématoscope, avec une échelle réduite des temps, comme les photographies astronomiques de M. Flammarion.

L'auteur, suivant M. Bertrand, débute d'après la manière conventionnelle par l'exposé des infiniment petits : mais je dois avouer cette opinion hérétique, que cette méthode laisse certainement dans plusieurs esprits l'impression que les résultats atteints sont seulement approchés. Dans la démonstration du numéro 8, où l'on prouve que l'intégrale représente une aire, la preuve peut être rigoureusement faite sans l'introduction des infiniment petits, au moyen des Lemmes I et II des *Principes*.

Vient maintenant la notion d'un coefficient différentiel, ou dérivée : ce nom français de *dérivée* est préférable à notre désignation plus longue de *coefficient différentiel*, qui n'a aucun sens au point de vue étymologique, à moins de l'interpréter comme le coefficient qui affecte la différentielle de la variable indépendante dans le développement de la variable dépendante. Ces différentielles, lorsqu'il y a plusieurs variables, et qu'elles varient isolément, sont les *vitesses virtuelles* de Lagrange si nous les supposons qualifiées par une dénomination symbolique $dt$, et leurs coefficients sont les dérivées partielles définies au numéro 18. Un desideratum à formuler dans cette partie du sujet est une notation plus définie pour les divers sens qu'on peut donner à $\delta z$, selon les variations de la variable qui l'engendre, spécialement quand on effectue un changement ayant pour effet de passer à de nouvelles variables indépendantes ; les exemples tirés de la théorie mécanique de la chaleur servent à montrer cette nécessité.

On a plaisir à trouver l'égalité de $f''_{yx}$ et $f''_{yx}$ présentée presque comme un axiome : « On démontre, dans les éléments de l'algèbre, que ces deux quantités sont égales » (p. 26). Trop souvent on donne une très longue démonstration, comme pour permettre de considérer certains cas exceptionnels qui ne se rencontrent jamais dans les applications pratiques.

Il est curieux pour nous que la notation $\sin^{-1}x$, $\cos^{-1}x$,... que nous employons pour arc $\sin x$, arc $\cos x$,... n'ait jamais été adoptée en France ; elle est justifiée par son usage dans la théorie des substitutions, et présente l'avantage d'être applicable à toutes les fonctions ; ainsi, lorsque

$$fx = y, \text{ on a } x = f^{-1}y.$$

Par exemple, la transformation de M. Hermite $t = -\frac{\mathrm{H}}{\mathrm{X}}$, où X est une fonction quartique, et H son hessien, montre que nous pouvons écrire l'intégrale elliptique générale de première espèce : $\int \frac{dx}{\sqrt{\mathrm{X}}} = \frac{1}{2} p^{-1}\left(-\frac{\mathrm{H}}{\mathrm{X}}\right)$, formule où $p$ représente la fonction de Weierstrass. M. Clifford emploie couramment les fonctions inverses des fonctions elliptiques de Jacobi. Par exemple,

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{[(1-x^2)(1-k^2x^2)]}} = \mathrm{F}\varphi = \mathrm{sn}^{-1}x,$$

formule ou $\mathrm{F}\varphi$ est l'intégrale de Legendre, et où $x = \sin\varphi$.

La notation est utile pour les fonctions inverses des fonctions hyperboliques Ch $x$, Sh $x$,... lorsqu'on emploie l'écriture adoptée dans les « Fonctions elliptiques » de MM. Tannery et Molk; elle permet de présenter les résultats des intégrales élémentaires d'une manière plus systématique ; par exemple,

$$\int_x^a \frac{dx}{\sqrt{(a^2-x^2)}} = \cos^{-1}\frac{x}{a}, \quad \int_a^x \frac{dx}{\sqrt{(x^2-a^2)}} = \mathrm{Ch}^{-1}\frac{x}{a};$$

toute analogie se perd si l'on exprime le second résultat sous la forme logarithmique $\log \frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{a}$, et la notation est beaucoup plus condensée que *sect, cos hyp.* $\frac{x}{a}$, employée dans le « Calcul intégral » de M. Bertrand.

Si l'on prend les expressions de l'aire de l'ellipsoïde de révolution, cherchée au n° 65, elles sont contenues dans la suivante :

$$2\pi b^2 + \frac{2\pi a^2 b}{\sqrt{(a^2 \backsim b^2)}} \begin{matrix}\cos^{-1}\\ \mathrm{Ch}^{-1}\end{matrix} \frac{b}{a}, \quad (1)$$

(1) La notation $a^2 \backsim b^2$ représente la valeur absolue de $a^2-b^2$.

la formule effective devant être choisie suivant que $b$ est plus petit ou plus grand que $a$.

On a encore (p. 21),

$$\int \frac{dx}{x^2 - k^2} = \frac{1}{2k} \log \frac{x - k}{x + k} = \frac{1}{k} \operatorname{Th}^{-1}\left(\frac{x}{k}, \quad \text{ou} \quad \frac{k}{x}\right).$$

On pourrait mentionner plusieurs autres applications, spécialement celles qui concernent la chaînette ; qu'il nous soit permis de citer encore la substitution

$$y = \frac{ax^2 + 2bx + c}{Ax^2 + 2Bx + C}$$

appliquée à l'intégrale générale (chap. v)

$$\int \frac{Hx + K}{(Ax^2 + 2Bx + C)\sqrt{ax^2 + 2bx + c}}\, dx$$

qui la décompose en deux parties, des formes

$$\int \frac{dy}{\sqrt{[y(y_1 - y)]}} \quad \text{et} \quad \int \frac{dy}{\sqrt{[y(y - y_2)]}},$$

où $y_1$ et $y_2$ représentent le maximum et le minimum de $y$ ; ces intégrales sont données par les fonctions

$$2 \cos^{-1}\sqrt{\frac{y}{y_1}}, \quad \text{ou} \quad 2 \sin^{-1}\sqrt{\frac{y}{y_1}}, \quad \text{et} \quad 2 \operatorname{Ch}^{-1}\sqrt{\frac{y}{y_2}}, \quad \text{ou} \quad 2 \operatorname{Sh}^{-1}\sqrt{\frac{y}{-y_2}};$$

nous supposons $AC - B^2$ positif, pour assurer la réalité de $y_1$ et $y_2$.

Dans la notation que je recommande, on a pour l'intégrale (p. 139)

$$\int \sec\ x dx = \operatorname{Ch}^{-1} \sec x,$$

et l'on établit ainsi un lien entre les valeurs numériques des fonctions hyperboliques et les tables des fonctions circulaires ; par exemple, au moyen de la table des parties méridionales dans la projection de Mercator, employée par M. le capitaine Guyou dans son nouveau système de navigation. L'intégrale plus générale où séc $x$ est remplacée par

$$\frac{1}{a + b \cos x + c \sin x}, \quad \text{ou} \quad \frac{1}{a + b \operatorname{Ch} x + c \operatorname{Sh} x},$$

est immédiatement réduite à une simple intégrale type par la substitution d'une nouvelle variable $y$ à l'une ou l'autre de ces expressions.

Les intégrales elliptiques $E\varphi$ et $F\varphi$ de Legendre sont introduites dans le chapitre vi, la seconde intégrale elliptique $E\varphi$ (bien que la première dans l'ordre historique) donnant la longueur de l'arc elliptique ; et la première intégrale elliptique $F\varphi$, dans le traité de Legendre, donnant le temps des oscillations finies d'un pendule. M. Appell n'a pas cru devoir introduire les fonctions elliptiques d'Abel et de Jacobi : nous le regrettons, car nous perdons ainsi sa belle illustration mécanique de la double périodicité des fonctions elliptiques ; cette périodicité devient pratiquement réalisable par l'addition ou la soustraction de poids au pendule, à la fin d'une oscillation, de manière à obliger le centre d'oscillation à passer d'un côté à l'autre du centre de suspension à la même distance.

La résolution d'une fonction arbitraire en termes d'une série de Fourier est considérée au chap. VII. Cette partie est d'un grand intérêt pratique pour les élèves de M. le professeur Appell, en ce qui concerne les projets de machines à rotation rapide, telles que les exige l'électricité, ou la propulsion des navires à vapeur ; le succès ou l'insuccès dépendant de la somme des vibrations produites. Les ingénieux instruments employés dans l'analyse des marées pour effectuer mécaniquement les intégrations, mériteraient d'être mentionnés, spécialement ceux qui ont été récemment perfectionnés par M. le professeur Michelson, de Chicago.

Les applications géométriques, dans les chapitres IX à XV, donnent la théorie des tangentes, des normales et des plans tangents ou normaux aux courbes et aux surfaces ; et la théorie de la courbure, comprenant en même temps celle des maximums et minimums des fonctions d'une ou de plusieurs variables. Nous rencontrons ici plusieurs nouveautés élégantes, telles que l'hélice osculatrice d'une courbe gauche, le tore osculateur d'une surface, aussi bien que le paraboloïde osculateur ordinaire ; les lignes asymptotiques d'une surface, et enfin (p. 313) la définition du *point central*, que, par exemple, j'avais vainement cherchée dans la Géométrie cinématique de M. le colonel Mannheim. Ce dernier ouvrage est spécialement attrayant dans les parties concernant la théorie de M. Darboux sur la polhodie, l'herpolhodie et ses inflexions, et l'hyperboloïde articulé déformable associé, au sujet duquel M. Mannheim, partant des travaux géométriques de Poinsot, se trouve conduit à l'étude approfondie de questions dynamiques.

La théorie de la courbure géodésique, développée ici au n° 307, appliquée à l'herpolhodie et au cône de l'herpolhodie, éclaire la méthode purement géométrique de M. Mannheim.

La distinction entre la différentielle exacte et l'intégrale prise le long d'une courbe, si importante dans la théorie mécanique de la chaleur, est discutée dans le chapitre XVII, avec des exemples et des diagrammes appropriés ; et dans le chapitre suivant, les diagrammes, illustrations d'une intégration double ou triple, montrant comment un solide est considéré dans le calcul intégral comme composé de briques infinitésimales, sont dessinés avec un grand soin. La question se pose de savoir s'il est avantageux de représenter de tels diagrammes d'une façon stéréoscopique, comme il est possible, avec un peu de pratique, et d'obtenir l'effet de relief sans le secours du stéréoscope. De grandes vues stéréoscopiques projetées sur un mur, selon l'idée de M. d'Ocagne, donneront l'impression de la figure solide si les yeux se portent sur un point à moitié distance ; on voit quelle peut être l'utilité de ces images dans les démonstrations de la géométrie solide. Considérant l'importance, en électricité et en magnétisme, du théorème de Green et la simplicité de son interprétation physique, l'auteur a bien fait de consacrer quelques pages à la fin du chapitre XVIII, à la démonstration des principes essentiels ; l'extension aux espaces à connexions multiples se fait aisément et est rendue intelligible par les analogies hydrodynamiques.

Nous avons conservé peu de place pour rendre compte des 150 pages restantes du livre, lesquelles sont consacrées aux équations différentielles, sujet poussé aussi loin qu'il est vraisemblablement nécessaire pour les élèves de l'auteur.

La méthode graphique indiquée au n° 356, pour prouver l'existence de l'intégrale de l'équation différentielle générale du premier ordre, a été employée pratiquement, avec une échelle et un pivot mobile, inventés par M. C.-V. Boys, pour tracer des courbes, inabordables analytiquement, comme la courbe élastique (p. 610), la courbe capillaire et les trajectoires d'un projectile avec la loi de résistance quadratique, en représentant graphiquement les tables dressées dans la Théorie balistique d'Euler. Les ellipses de Lissajous, avec les hyperboles associées (fig. 199) donnent une interprétation géométrique élégante de l'équation différentielle $\frac{dx}{\sqrt{X}} + \frac{dy}{\sqrt{Y}} = 0$.

La remarque de la p. 574, que « les courbes representées par une équation différentielle homogène du premier ordre sont homothétiques par rapport à l'origine », aide à élucider la théorie : de même, les équations différentielles du quatrième type (n° 364) représentent une famille de courbes telles que toutes les tangentes pour une même valeur de $x$ passent par un même point.

Dans la discussion (chap. XXI) des équations différentielles linéaires à coefficients constants, les termes extraits de la théorie des engins à vapeur et des dynamos aident à donner des idées concrètes aux étudiants techniques et aux électriciens. Ainsi, par exemple, une simple différentiation ou intégration de cos $mx$ donne une *avance* ou un *retard* d'un angle droit, et multiplie ou divise l'amplitude par $m$; l'opération

$$\frac{a\frac{d}{dx} + b}{c\frac{d}{dx} + d}$$

sur cos $mx$, multiplie l'amplitude par $\sqrt{(a^2m^2 + b^2)}$, et donne une avance de tang$^{-1}\frac{am}{b}$ ; et divise l'amplitude par $\sqrt{(c^2m^2 + d^2)}$ et donne un retard de tang$^{-1}\frac{cm}{d}$; semblablement pour les vibrations avec un module d'extinction, représenté par $e^{-px}$ cos $mx$, comme dans l'équation du galvanomètre de la page 625.

Les équations générales de la Dynamique sont exposées dans le chapitre XXII et dans le chapitre XXIII, qui donne la solution de l'équation aux différentielles partielles du premier ordre $Xp + Yq = Z$ : on montre comment on représente les surfaces engendrées par les courbes données par

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} = \frac{dz}{Z},$$

avec des applications spéciales aux cylindres, aux cônes et aux surfaces de révolution.

Le dernier chapitre, XXIV, donne la théorie de la quadrature et de la cubature approximatives, telle que l'exigent l'art de l'ingénieur civil et celui de l'Architecture navale, et le livre se termine par une élégante démonstration de la théorie des planimètres. Pour écarter toute trace de doute des esprits dont j'ai parlé plus haut, qui ne sont pas convaincus par la méthode des infiniment petits et qui disputent sur le motif en vertu duquel on néglige l'élément BB'B'' dans la figure 218, il est bon d'étendre la méthode employée dans la figure 217, appliquée aux aires finies, au planimètre d'Amsler, en prenant un contour fini qui est décrit par le mouvement des articulations O et A, isolément.

Une modification du planimètre d'Amsler a été récemment introduite d'Amérique : c'est l'invention de M. Lippincott : dans cet instrument, la roulette est libre de glisser sur une barre graduée fixée à angle droit sur le bras AB, de sorte que le mouvement de cette roulette sur le papier est un pur roulement, sans aucun glissement latéral (ou *dérapage*), par conséquent plus doux : le mouvement de la roulette sur la barre graduée enregistre l'aire.

C'est avec un grand plaisir que j'ai parcouru consciencieusement les chapitres de ce livre suggestif, et que j'ai noté les nombreuses nouveautés de cette exposition : trop nombreuses assurément pour qu'on puisse les citer toutes dans ce compte rendu ; le petit nombre de celles que j'ai choisies pour la discussion servira, il faut l'espérer, à indiquer le but général, fort intéressant et utile, de M. Appell.

A.-G. Greenhill (Woolwich).
Artillery College.

G. Oltramare. — **Calcul de généralisation** ; 1 vol. gr. in-8°. Prix : 6 fr. ; Paris, Hermann, 1899.

Depuis de longues années déjà, l'éminent doyen de la faculté des sciences de Genève a consacré ses efforts à répandre les principes du calcul de généralisation créé par lui, et à montrer l'étendue et la fécondité des applications de ce procédé analytique. Il nous le présente aujourd'hui sous une forme définitive. Nous ne saurions mieux faire, pour en donner une idée générale, que d'emprunter quelques extraits à sa courte préface.

« Le calcul de généralisation, dit-il, a pour base la représentation des fonctions uniformes, sous une forme symbolique telle que l'on puisse effectuer sur ces fonctions les principales opérations auxquelles elles sont soumises, comme leur différentiation et leur intégration, à l'aide d'un calcul algébrique très simple à effectuer... Un des principaux avantages qu'il présente consiste dans l'application qu'on en peut faire à l'intégration des équations.

« Après avoir établi quelques principes généraux, nous nous sommes appliqué à déterminer une intégrale particulière de toute équation différentielle, ou aux différences et différentielles partielles linéaires à coefficients constants avec un second membre ; nous nous sommes également occupé de l'intégration des équations simultanées, des équations aux différences mêlées, et de certaines classes d'équations aux différentielles partielles avec coefficients variables ; enfin nous avons reconnu que dans plusieurs cas on pouvait déterminer la fonction qui figure dans une intégrale définie dont la valeur est donnée.

« En résumé, le calcul de généralisation nous semble devoir occuper une place importante dans l'analyse supérieure. L'uniformité et la simplicité de ses procédés, son application à la solution d'une multitude de questions d'une grande importance, nous font espérer qu'il pourra trouver place dans l'enseignement et se substituer avec avantage aux différentes méthodes